

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

# 物理学与偏微分方程

## （第二版）（上册）

# Physics and Partial Differential Equations

## (Second Edition) (Volume I)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社



研究生教学用书　教育部研究生工作办公室推荐


ISBN 7-04-015853-1
9 787040 158533 >
定价 29.40 元



# 物理学与偏微分方程

## （第二版）（上册）

# Physics and Partial Differential Equations

## (Second Edition) (Volume Ⅰ)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

## 内容提要

本书是教育部研究生工作办公室推荐的“研究生教学用书”，是在第一版的基础上修订而成的。这次修订除了改正了第一版中的几处印刷错误，并在第五章第四节末尾加了一小段外，其余未作改动。

本书力求在物理学与偏微分方程之间架设一座桥梁，帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生、高年级大学生及其他学科领域与应用部门的学者和研究工作者熟练掌握近代物理学中一些重要的基本方程，了解其来龙去脉及推导过程，理解现今国际上一些重要并常见的数学模型，从而可以更自觉地学习和运用，并学会抓住一些有意义的问题开展研究工作。

全书分上、下两册出版。上册共5章，从最基本的物理概念出发，分别介绍了电动力学、流体力学、磁流体力学、反应流体力学、弹性力学，重点介绍建立它们的基本方程的全过程，并对这些方程在数学上的结构与特征作简略的说明，还有选择地介绍了近年来国际上的一些最近的研究成果。

**图书在版编目(CIP)数据**

物理学与偏微分方程．上册/李大潜，秦铁虎编著．2版．—北京：高等教育出版社，2005.1

ISBN 7-04-015853-1

Ⅰ．物… Ⅱ．①李… ②秦… Ⅲ．①物理学-研究生-教学参考资料②偏微分方程-研究生-教学参考资料 Ⅳ．①O4②O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第139819号

**策划编辑** 李蕊　**责任编辑** 郭思旭　**封面设计** 李卫青
**责任绘图** 郝林　**责任印制** 杨明

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总　　机 010-58581000

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂

开　　本 787×960　1/16
印　　张 19.75
字　　数 330 000

版　　次 1997年7月第1版
　　　　 2005年1月第2版
印　　次 2005年1月第1次印刷
定　　价 29.40元



**物料号：15853-00**

# 新版序

本书第一版上册于 1997 年 7 月，下册于 2000 年 6 月出版. 在下册出版的同年 7 月，应读者的需要，在改正了少数印刷错误后，将上册第 2 次印刷.

这次出版，除改正了上、下册中已发现的不多几处印刷错误，并在第五章 §5.4 末尾加一小段外，其余均未更动，特此说明. 利用这个机会，对本书面世以来众多师友和广大读者的鼓励和厚爱表示由衷的谢意.

作者

2003 年 9 月于上海

# 序

很多重要的物理、力学学科，其基本方程均是偏微分方程. 这些方程的名称虽然不少是人们熟悉的，且有相当多的研究工作在其基础上进行，但要真正全面、深入地了解有关的物理、力学背景，却不是一件容易的事. 为了帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生与大学高年级学生、以及其他学科领域与应用部门的学者和研究工作者熟练掌握近代物理学中一些重要的基本方程，深入了解其来龙去脉及推导过程，方便地理解现今国际上常用的一些数学模型，从而更自觉地学习和运用，并学会抓住一些真正有意义的问题，有的放矢地开展研究工作，特编著本书，力求在物理学与偏微分方程之间架设一座桥梁.

在本书中，将从最基本的物理概念出发，对电动力学、流体力学、磁流体力学、反应流体力学、弹性力学、热弹性力学、粘弹性力学、气体分子运动论、狭义相对论、量子力学等物理、力学学科，重点介绍建立它们的基本方程的全过程，同时，对这些方程在数学上的结构与特征，包括方程的类型及基本特点、解的性态及常用的求解方法等作一简略的说明，对近年来国际上的一些最新研究成果，包括作者及其研究集体的一些研究成果，也有选择地加以介绍. 希望不熟悉有关物理、力学学科的读者能在不太长的时间内由浅入深地接触到该学科的核心，从而尽快地完成从物理到数学，从有关物理、力学领域到其由偏微分方程描述的数学模型的过渡. 另一方面，对

已经比较熟悉有关物理、力学内容的读者，希望通过对其基本方程的数学结构及特征的深入了解，进一步看到由于采用了有效的数学工具与表达方式，物理学的基本内容将以更为清晰的形式表现出来，从而更自觉地运用近代数学的概念、方法和工具来研究有关的物理、力学问题.

本书分上、下两册，每册各五章. 各章内容是相对独立的，但又有一定的呼应与联系. 每章后均附有习题及参考文献. 学习过大学数学、物理等本科基础课程的读者，阅读本书的绝大部分章节应不会遇到本质上的困难. 本书可用作研究生课程或大学高年级选修课教材，亦可用作参考书或课外读物.

自 1987 年下半年起，本书中的内容作为大学高年级选修课及研究生学位基础课已在复旦大学连续讲授过多次，取得了良好的教学效果，讲稿也经过了不断地补充和修改，本书是在此基础上定稿的.

感谢高等教育出版社对本书出版的热情支持以及郭思旭编审精心细致的编辑工作. 感谢蔡志杰博士以负责的态度与娴熟的技巧打印了全部书稿. 感谢辜英求博士协助作者用国际单位制统一了本书中的物理单位. 特别是，感谢武汉大学数学系齐民友教授及复旦大学物理系倪光炯教授仔细地审阅了本书原稿，并提出了许多有益的意见和建议. 他们的辛勤劳动使本书为之生色.

作者是数学工作者，水平有限，对物理学的理解更属肤浅，不妥及疏漏之处在所难免，恳请读者不吝赐正.

作者

1996 年 11 月 10 日

# 目　录

# 第一章　电动力学

## §1. 引　　言

电动力学研究的对象是电磁场，研究电磁场的基本属性 —— 运动规律及它和带电物质的相互作用.

电场和磁场开始是作为一种描述手段而引入的. 后来才逐步揭露了它的本质，知道它也是物质的一种存在形式，有其运动规律，并可以和带电物质相互作用. 而且，它也有能量及动量等物质运动的基本属性；在和带电物质相互作用时，其能量、动量可以互相转化.

要了解电磁场，就是要知道电场强度 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$ 随空间位置 $(x,y,z)$ 及时间 $t$ 的变化情况，即掌握函数 $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$. 有了它们就知道了电磁场的分布及变化规律，就可以算出电磁场对带电物质的作用力 (由洛伦兹 (Lorentz) 公式表示)，也可以算出电磁场的能量与动量等.

电磁场的运动规律由场的运动方程，即 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 所满足的一组偏微分方程 —— 称为麦克斯韦 (Maxwell) 方程组来描述. 根据问题的具体特点，在一些给定的定解条件下求解麦克斯韦方程组，就可以求得相应的 $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ 及 $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$，从而确定所考察的电磁场，并由此得到其一切特性. 像牛顿 (Newton) 力学中的 $F=ma$ 一样，麦克斯韦方程组是电动力学中的基本方程，是一切有关电磁场讨论的基础和出发点.

因此电动力学的内容，粗略地概括起来为

(a) 根据电磁场的基本特性，建立麦克斯韦方程组. 这是电动力学的基本方程及一般框架.

(b) 针对各种具体情况，对麦克斯韦方程组作各种简化，求得其解，并进行相应的物理解释.

我们将重点放在 (a) 上，对 (b) 中的内容仅有选择性地作一些讲解.

## §2. 预备知识

对于建立麦克斯韦方程组所需要的预备知识，包括电场、磁场及电磁感应等有关内容，在此先作一些必要的回顾，并给出相应的数学形式，然后在下节中，将其有机地组合成所要求的麦克斯韦方程组.

### 2.1. 库仑 (Coulomb) 定律，静电场的散度与旋度

#### 2.1.1. 库仑定律，电场强度

库仑定律是一个实验定律，是整个静电理论的基础. 其基本内容如下：设在真空中有两个带电量分别为 $q$ 与 $q_1$ 的静止点电荷. 记 $\boldsymbol{r}_1$ 为由点电荷 $q_1$ 所在的位置到点电荷 $q$ 所在的位置的向量 (矢径), 其距离 $r_1 = |\boldsymbol{r}_1|$, 则点电荷 $q$ 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = k\frac{qq_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}, \tag{2.1}$$

其中 $k > 0$ 为常数，其大小与我们选用的单位有关. 本书采用国际单位制，此时力的单位为牛顿 (N), 距离的单位为米 (m), 电荷的单位为库仑 (C), 而

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{2.2}$$

其中 $\varepsilon_0 = 8.854\,19 \times 10^{-2}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$ 为真空中的介电常量.

这里要注意的是，库仑定律成立的条件限于真空中静止的点电荷.

如果一个点电荷 $q$ 同时受几个点电荷 $q_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 的作用，则可以应用向量叠加方式得到 $q$ 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{qq_i\boldsymbol{r}_i}{r_i^3},$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为点电荷 $q_i$ 到 $q$ 的矢径， $r_i = |\boldsymbol{r}_i|$.

类似地，如果一个点电荷 $q$ 受到连续分布在空间区域 $\Omega$ 中的电荷的作用，而电荷分布的体积密度为 $\rho(x, y, z)$, 则由叠加原理， $q$ 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{q\rho\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V,$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为体积元 $\mathrm{d}V$ 到 $q$ 的矢径，而 $r = |\boldsymbol{r}|$.

由库仑定律，电荷附近的空间有特殊的物理性质：在此空间中的电荷将受到力的作用. 具有这种性质的物理对象，称为 电场，它在数学上可用反映电荷受力作用的向量场来描述. 这里，电场是由于电荷的存在而产生的. 但今后可以看到，电场是物质存在的一种形式，它可以离开电荷而独立存在 (例如，变化的磁场产生电场). 由静止电荷产生的电场称为 静电场.

在电场中不同地点，电荷所受的力是不相同的. 为了描述电荷在电场中各点的受力情况，用一个静止的单位正点电荷 (试验电荷) 在该点所受的力来衡量电场在该点的强度，称为 电场强度，记为 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$. 在静电场的情况，它只是 $(x,y,z)$ 的函数. 对于随时间 $t$ 变化的电场，电场强度可以同样定义，这时它就也是 $t$ 的函数了. 但对于变化的电场而言，为定义电场强度，试验电荷仍必须是静止的.

由库仑定律，静止的点电荷 $q$ 在强度为 $\boldsymbol{E}$ 的电场中所受的力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}. \tag{2.3}$$

在实际测定电场强度时，要注意试验电荷的引进不致于对原先的电场造成大的改变. 因此，不一定用单位正点电荷作试验电荷，而可以用一个小的点电荷 $q$，由 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}/q$ 来确定电场强度 $\boldsymbol{E}$.

由 (2.1)—(2.2) 知，点电荷 $q_1$ 产生的电场的强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}, \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1$ 为以 $q_1$ 为心的矢径；类似地，若干个点电荷 $q_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 产生的电场的强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\boldsymbol{r}_i}{r_i^3}; \tag{2.5}$$

而体积密度为 $\rho$ 、在 $\varOmega$ 中连续分布的电荷产生的电场的强度为

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varOmega}\frac{\rho(P')\boldsymbol{r}_{P'P}}{r_{P'P}^3}\mathrm{d}V_{P'}, \tag{2.6}$$

其中 $P:(x,y,z)$, $P':(x',y',z')$, $\boldsymbol{r}_{P'P}=\overrightarrow{P'P}=(x-x',y-y',z-z')$, $\mathrm{d}V_{P'}=\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$.

以上公式，只适用于由静电荷产生的电场.

### 2.1.2. 高斯 (Gauss) 定理

首先引进 电通量 的概念.

有了电场强度 $\boldsymbol{E}$, 就可以定义 电场线. 电场线是向量场 $\boldsymbol{E}$ 的积分曲线，即处处与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 方向相切的曲线，它满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x}=\frac{\mathrm{d}y}{E_y}=\frac{\mathrm{d}z}{E_z}, \tag{2.7}$$

并用 $\boldsymbol{E}$ 的方向给出其定向. 电场线应该充满整个空间. 但为了用电场线来显示电场的强弱分布情况，习惯上规定：电场强度大的地方，电场线密集；电场强度小的地方，电场线稀疏. 为此，规定在电场中一点，沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过一垂直于 $\boldsymbol{E}$ 方向的单位曲面元的电场线数目为 $\pm|\boldsymbol{E}|=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为该曲面元的单位法向量，而 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的内积 (数量积). 若 $\boldsymbol{n}$ 的方向与 $\boldsymbol{E}$ 一致，上式取正号； $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 反向时，取负号. 这样，对一般的曲面微元 $\mathrm{d}S$, 设其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则其上沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过的电场线数目为 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, 这称为沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过 $\mathrm{d}S$ 的 电通量. 从而，沿法线 $\boldsymbol{n}$ 方向通过任意给定曲面 $S$ 的电通量应为 $\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, 其中 $\mathrm{d}S$ 为 $S$ 上的面积微元. 由以上定义知，电通量实际上就是向量场 $\boldsymbol{E}$ 通过相应曲面的流量.

**高斯定理**　*在静电场中，通过任一封闭曲面 $\Gamma$ 向外的电通量，等于此曲面内部所包含的电荷的代数和除以 $\varepsilon_0$.*

由高斯定理，若 $\Gamma$ 内部为点电荷，其电量的代数和为 $Q$, 则

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}Q; \tag{2.8}$$

若 $\Gamma$ 内部是体积密度为 $\rho$ 的连续分布的电荷，则

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega \rho\mathrm{d}V, \tag{2.9}$$

其中 $\Omega$ 为 $\Gamma$ 所围区域， $\boldsymbol{n}$ 为 $\Gamma$ 的单位外法线向量.

**高斯定理的证明**　由叠加原理，只需对 $\Gamma$ 内为单位正点电荷的情形予以证明，且不妨取此点电荷所在点为原点. 此时，由 (2.5) 式，电

场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{2.10}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 因此

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta\mathrm{d}S,$$

其中 $\theta$ 为 $\mathrm{d}S$ 的单位外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角. 不难看出

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}S$$

是 $\mathrm{d}S$ 对原点所张的立体角, 其取正值或负值视 $\theta$ 为锐角或钝角而定. 由于封闭曲面对其内部任一点的立体角均为 $4\pi$, 故

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Gamma\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

定理证毕.

这样, 通过一封闭曲面的电通量只与其内部所含电荷的总量有关, 与电荷的分布无关, 也与外界的电荷无关!

(2.9) 式是高斯定理的积分形式. 现在我们来讨论其微分形式. 利用格林 (Green) 公式

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V, \tag{2.11}$$

由 (2.9) 式得到

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega\rho\mathrm{d}V.$$

上式应对电场中的任何区域 $\Omega$ 均成立, 由此得到高斯定理的微分形式为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.12}$$

这是在电荷连续分布情形的高斯定理.

对于点电荷的情形, 利用 $\delta$- 函数, 也可将 (2.8) 式写为 (2.12) 的形式. 为简单计, 不妨设只有一个点电荷 $Q$ 位于原点, 其电荷密度函数可写为 $Q\delta(x,y,z)$, 此时由 (2.8) 与 (2.11) 式, 仍有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q\delta(x,y,z). \tag{2.13}$$

这是高斯定理在点电荷情形的微分形式.

由 (2.12)—(2.13) 式可知，**静电场是有源场**，而电荷是其源. 每个单位正电荷发出 $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ 的电通量，而单位负电荷则敛入 $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ 的电通量. 下面将看到，这是静电场与静磁场，也是一般电场与磁场的一个重要区别.

下面说明静电场是无旋的. 首先证明，对静电场中任一封闭曲线 $l$, 成立

$$\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0. \tag{2.14}$$

上式说明，静电场中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任一封闭曲线 $l$ 的环量为零，即静电场沿任一封闭环路所作的功为零. 像前面那样，我们也只要对由在原点处的单位正点电荷形成的静电场来证明 (2.14) 式. 此时电场强度 $\boldsymbol{E}$ 由 (2.10) 式给出，故

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

而 $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2)=r\mathrm{d}r$, 所以

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)=0,$$

从而 (2.14) 式成立.

下面讨论 (2.14) 式的微分形式. 由斯托克斯 (Stokes) 公式，(2.14) 可写为

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $S$ 为任一以 $l$ 为边缘的曲面. 由 $l$ 与 $S$ 的任意性，由上式立即得出

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \tag{2.15}$$

因此 **静电场是无旋场**.

现在，利用静电场的无旋性，引进静电场的势的概念. 因向量场 $\boldsymbol{E}$ 无旋，因而存在一个标量函数 $\phi(x,y,z)$ 使

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi, \tag{2.16}$$

这里 $\phi$ (可以相差一个任意常数) 称为 **静电场的势** (参见本章 §6, 引理 6.2). (2.16) 式的右端取负号是为使电场强度指向电势降低的方向.

在国际单位制下，电势的单位为伏特 (V)，相应地，电场强度的单位为伏特 / 米 (V/m).

实际上，静电场的势函数 $\phi$ 可由下式给出

$$\phi(x,y,z) = -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \phi_0, \tag{2.17}$$

这里 $(x_0, y_0, z_0)$ 为电场中任一给定点， $\phi_0$ 为一任意常数. 由 (2.15) 式可知，上式右端的积分与路径无关.

容易直接验证，由位于原点、电量为 $Q$ 的点电荷产生的静电场，若取电势 $\phi$ 在无穷处为零，则

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 从而，对在 $\Omega$ 中连续分布、体积密度为 $\rho$ 的电荷产生的静电场的电势为

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(P')}{r_{P'P}}\mathrm{d}V_{P'}.$$

概括起来，我们得到：*静电场是一个有源无旋场，其散度等于 $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$，旋度为零*. 这是库仑定律的推论. 以后可以看到，尽管库仑定律只适用于静电情况，在一般情况下不适用，但电场强度的散度为 $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ 这一结论对一般情况也是成立的，而无旋的结论则只适用于静电场.

## 2.2. 安培 – 毕奥 – 萨伐尔 (Ampère–Biot–Savart) 定律，静磁场的散度与旋度

### 2.2.1. 电流密度，电荷守恒定律

电荷如果不是静止的，电荷的定向流动就形成电流. 为了描述电流的状态，引入电流密度向量 $\boldsymbol{j}$ 的概念. 电流密度向量是 $t$, $x$, $y$, $z$ 的函数，表示导体内一点在某一时刻的电流流动情况，其定义如下：*电流密度 $\boldsymbol{j}$* 的方向是该点电流流动的方向，其大小表示单位时间通过垂直于电流方向的单位面积的电荷量. 因此，对单位法线向量为 $\boldsymbol{n}$ 的曲面微元 $\mathrm{d}S$, 沿 $\boldsymbol{n}$ 方向在单位时间内流过 $\mathrm{d}S$ 的电荷量 (即电流) 为

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

在国际单位制中，电流的单位为安培 (A)，而 1 安培 =1 库仑 / 秒 (C/s).

电荷守恒定律 告诉我们：电荷是守恒的．于是单位时间里任一封闭曲面 $\Gamma$ 内电荷的增加，应等于这段时间内经过 $\Gamma$ 流入的电荷总和，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho\mathrm{d}V=-\int_{\Gamma}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{2.18}$$

其中 $\Omega$ 为由 $\Gamma$ 所包围的区域， $\boldsymbol{n}$ 是 $\Gamma$ 上的单位外法线向量．于是，由格林公式 (2.11) 式可得

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathrm{d}V=-\int_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\mathrm{d}V. \tag{2.19}$$

由 $\Omega$ 的任意性，上式给出

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0. \tag{2.20}$$

这就是电荷守恒定律的微分形式，称为 电流的连续性方程．若记电荷的宏观运动速度为 $\boldsymbol{v}$，则易知 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$．将其代入 (2.20) 式，可见它与连续介质力学中的连续性方程 (见第二、五章) 有同样的形式．

在稳定电流的情况，尽管有电荷流动，但各处电荷分布及电流分布均不随时间而变化，因此有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0. \tag{2.21}$$

这说明稳定电流是无源的． (2.21) 式的积分形式为

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0, \tag{2.22}$$

其中 $\Gamma$ 为电场中任一封闭曲面．

在稳定电流的情况，导体的电荷构成一个不随时间 $t$ 变化的稳定分布．实验表明，稳定电流形成的电场仍服从库仑定律，故仍可作为静电场来处理，其电场强度

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(P')\boldsymbol{r}_{P'P}}{r_{P'P}^3}\mathrm{d}V_{P'}. \tag{2.23}$$

此时，$\boldsymbol{E}$ 仍是一个有源无旋的场，且仍成立

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

总之，稳定电流形成的电场仍服从静电场的规律.

### 2.2.2. 安培 – 毕奥 – 萨伐尔定律，磁感强度

人们发现，在有电流通过的导线附近的另一通电导线要受到作用力. 若电流方向相同，二电线相吸引；电流方向相反，二电线相斥. 一般说，一个电流元 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}V$ 处在其他电流附近时，它会受到作用力. 具有这种性质的物理对象，称为 磁场，它在数学上可用反映电流元受力作用的向量场来描述. 以后会看到，磁场的引入不只是一个处理问题的手段，而是反映了客观的物理实在. 磁场不一定由电流产生，变化的电场也能产生磁场.

考察一个稳定的电流分布 $\boldsymbol{j}(x,y,z)$. 实验结果表明，此分布中在 $P$ 点的电流元 $\boldsymbol{j}(P)\mathrm{d}V_P$ 受到在 $P'$ 点的电流元 $\boldsymbol{j}(P')\mathrm{d}V_{P'}$ 的作用力为

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{j}(P)\mathrm{d}V_P \times \left(\frac{\boldsymbol{j}(P')\mathrm{d}V_{P'} \times \boldsymbol{r}_{P'P}}{r^3_{P'P}}\right), \tag{2.24}$$

其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 伏特 · 秒 /(安培 · 米) (V·s/(A·m)) 为真空中的 磁导率，而向量间的 "×" 表示向量的外积 (向量积). 从而 $P$ 点的电流元 $\boldsymbol{j}(P)\mathrm{d}V_P$ 所受的总的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{j}(P)\mathrm{d}V_P \times \int_\Omega \frac{\boldsymbol{j}(P')\mathrm{d}V_{P'} \times \boldsymbol{r}_{P'P}}{r^3_{P'P}}, \tag{2.25}$$

其中 $\Omega$ 为电流分布的空间. 这就是 安培 – 毕奥 – 萨伐尔定律.

令

$$\boldsymbol{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\boldsymbol{j}(P')\mathrm{d}V_{P'} \times \boldsymbol{r}_{P'P}}{r^3_{P'P}}, \tag{2.26}$$

(2.25) 式即可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P) = \boldsymbol{j}(P)\mathrm{d}V_P \times \boldsymbol{B}(P), \tag{2.27}$$

这里 $\boldsymbol{B}(P)$ 称为 $P$ 点的 磁感强度，其单位为特斯拉 (T)，1 特斯拉 = 1 牛顿 /(安培 · 米) (N/(A·m)). 由上式可见，电流元所受的力不仅与

$\boldsymbol{B}$ 的大小，且与其方向有关. 此外，磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小等于单位电流元在该点所受的最大的力，而其方向则为电流元受力为零时所指的方向或其反向. 在形式上，公式 (2.27) 和静电场中的电荷元 $\rho(P)\mathrm{d}V_P$ 的受力公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(P)=\rho(P)\mathrm{d}V_P\boldsymbol{E}(P) \tag{2.28}$$

是类似的；而磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义 (2.26) 则和电场强度的定义

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega\frac{\rho(P')\boldsymbol{r}_{P'P}}{r_{P'P}^3}\mathrm{d}V_{P'} \tag{2.29}$$

是类似的.

由稳定电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 只是 $(x,y,z)$ 的函数，称为*静磁场*.

### 2.2.3. 安培定理

对静磁场，其磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 满足下述的

**安培定理** *对任意的封闭曲线 $l$, 成立*

$$\oint_l\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{2.30}$$

*这里 $S$ 为任一以 $l$ 为边缘的曲面，其单位外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的取向与 $l$ 的回转方向构成右手系.*

实际上，(2.30) 右端的曲面积分与曲面 $S$ 的选取无关. 这是稳定电流的连续性方程 (2.22) 的推论.

(2.30) 是安培定理的积分形式. 由斯托克斯公式

$$\oint_l\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{2.31}$$

利用 (2.30) 式，并注意到 $S$ 的任意性，得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{2.32}$$

这是安培定理的微分形式. 在所讨论的量为光滑的范围内，它等价于积分形式 (2.30). 上式说明*静磁场是有旋场，其旋度为 $\mu_0\boldsymbol{j}$.*

**安培定理的证明** 我们证明其微分形式 (2.32). 下面以 grad, rot, div 与 grad′, rot′, div′ 分别表示关于 $(x,y,z)$ 与 $(x',y',z')$ 的梯度、旋度及散度.

注意

$$\frac{\boldsymbol{r}_{P'P}}{r_{P'P}^3} = -\text{grad}\,\frac{1}{r_{P'P}},$$

并利用向量分析中的公式

$$\text{rot}(\phi\boldsymbol{A}) = \text{grad}\,\phi \times \boldsymbol{A} + \phi\text{rot}\boldsymbol{A},$$

由 (2.26) 式给出的 $\boldsymbol{B}$ 可写为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \text{grad}\,\frac{1}{r_{P'P}} \times \boldsymbol{j}(P')\text{d}V_{P'} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \left(\text{rot}\frac{\boldsymbol{j}(P')}{r_{P'P}} - \frac{1}{r_{P'P}}\text{rot}\boldsymbol{j}(P')\right)\text{d}V_{P'} \\
&= \text{rot}\boldsymbol{A}(P),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\boldsymbol{j}(P')}{r_{P'P}}\text{d}V_{P'}. \tag{2.34}$$

这样，由 (2.33) 并利用向量分析中的公式，有

$$\text{rot}\boldsymbol{B}(P) = \text{rot}(\text{rot}\boldsymbol{A}(P)) = \text{grad div}\,\boldsymbol{A}(P) - \Delta\boldsymbol{A}(P), \tag{2.35}$$

其中 $\Delta$ 为关于 $(x, y, z)$ 的拉普拉斯 (Laplace) 算子: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

首先计算 (2.35) 式右端的第一项. 由 (2.34) 式,

$$\begin{aligned}
&\text{div}\,\boldsymbol{A}(P) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \text{div}\left(\frac{\boldsymbol{j}(P')}{r_{P'P}}\right)\text{d}V_{P'} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \text{grad}\,\frac{1}{r_{P'P}} \cdot \boldsymbol{j}(P')\text{d}V_{P'} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \text{grad}'\frac{1}{r_{P'P}} \cdot \boldsymbol{j}(P')\text{d}V_{P'} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \text{div}'\left(\frac{\boldsymbol{j}(P')}{r_{P'P}}\right)\text{d}V_{P'} \\
&\quad + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\text{div}'\boldsymbol{j}(P')}{r_{P'P}}\text{d}V_{P'}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

利用稳定电流的连续性方程 (2.21) 以及格林公式, 上式可写为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{j}(P')}{r_{P'P}} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S_{P'}, \tag{2.37}$$

这里 $\partial\Omega$ 为 $\Omega$ 的边界. 由于 $\Omega$ 包含全部电流所在的区域, 在其边界上, 应有 $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, 所以 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P) = 0$, 从而

$$\operatorname{grad}\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{0}. \tag{2.38}$$

再看 (2.35) 式右端的第二项. 由 (2.34) 式, $\boldsymbol{A}(P)$ 的每一分量均为一个体位势. 但已知体位势

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{f(P')}{r_{P'P}} \mathrm{d}V_{P'},$$

是泊松 (Poisson) 方程 $\Delta u(P) = f(P)$ 的解. 故由 (2.34) 式有

$$\Delta \boldsymbol{A}(P) = -\mu_0 \boldsymbol{j}(P). \tag{2.39}$$

由 (2.35)、(2.38) 与 (2.39) 式即得 (2.32) 式. 证毕.

从上面的推导还可看出, *静磁场是无源场*, 即成立

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{2.40}$$

事实上, 由 (2.33) 式知

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \operatorname{div}\ \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0.$$

(2.40) 式的积分形式为

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0, \tag{2.41}$$

其中 $S$ 为所考察区域中的任一封闭曲面. 这说明对任一封闭曲面, 其向外的磁感通量恒为零; 即其进出的磁感通量相等, 代数和为零.

磁场的无源性是与电场不同的特点. 这说明磁场线永远是封闭的曲线, 正负磁荷永远成对地存在. 从电与磁的对称性, 人们猜测有可能存在磁单极, 也已有了不少理论上的分析. 尽管有报告说已从宇宙射

线中发现了磁单极，但目前还没有得到证实．这是理论物理学界感兴趣的一个研究课题．如果存在磁单极，磁场也要变成有源场，整个理论就要作很大的修改了．

这样，*稳定电流的磁场（静磁场）是一个无源有旋场*．这是安培－毕奥－萨伐尔定律的推论．以后可以看到，尽管安培－毕奥－萨伐尔定律只适用于静磁场，但磁场的无源性 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$) 在一般情况下仍然成立．而 $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ 的结论在一般情形下将与电荷守恒定律相矛盾，从而必须修改．

### 2.3. 法拉第 (Faraday) 电磁感应定律

对于静电场（即由静止电荷产生的电场）或由稳定电流产生的电场，我们已知对其中的任一闭环路 $l$ 有

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0,$$

即电场沿任一闭环路所作的功为零．但是，产生电场不一定要有电荷，变化的磁场也会产生电场，即产生感应电动势．这时上述的结论就不再成立．法拉第从实验中总结出如下的

**电磁感应定律** *沿任何封闭曲线 $l$ 的电场环量 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和通过以此曲线为边缘的任一曲面 $S$ 上的磁感通量 $\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 的减少率成正比，即*

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{2.42}$$

*这里单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的取向使其与 $\boldsymbol{l}$ 的方向合乎右手系．*

(2.42) 式中负号的意义是：若沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的磁感通量增加，即

$$\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S>0,$$

此时产生的感应电动势应抑制这一磁通量的增加趋势，故感应电流的方向总是使其产生的磁场阻碍引起感应电流的磁感通量的变化，因此对感应电动势而言，$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}<0$．这就是*楞次 (Lenz) 定律*．

(2.42) 式左端积分中的 $\boldsymbol{E}$ 既包含了由变化的磁场产生的电场，也包含了由静电荷或稳定电流产生的电场，因对后者总成立 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$．

利用斯托克斯公式，并注意到 $l$ 及 $S$ 的任意性，由 (2.42) 式立得法拉第电磁感应定律的微分形式：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{2.43}$$

这说明变化的磁场会激发电场.

由法拉第电磁感应定律可以看出，在静电场或由稳定电流产生的电场情形成立的电场的无旋性 $\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, 在一般情形下不再成立，必须按 (2.43) 式加以修改. (2.43) 包含了一般的情况，即由静电荷或稳定电流产生的电场及由变化磁场所激发的电场. 这一式子将是以下描述电磁场一般规律的麦克斯韦方程组的一个组成部分.

此外，为使 (2.42) 式成立，其右端的积分应与曲面 $S$ 的选取无关，即对任意两个以 $l$ 为边缘的曲面 $S_1$ 及 $S_2$, 应成立

$$\int_{S_1} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_{S_2} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

由此立即推出，对任一封闭曲面 $S$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0,$$

即对任一封闭曲面，其向外的磁感通量不随时间而改变. 化为微分形式，即有

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0. \tag{2.44}$$

因此，如果一开始磁场是无源的，例如说没有磁场 $(\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0})$ 或只有由稳定电流产生的磁场 $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0)$, 那么，以后磁场尽管可以发生变化，但恒成立 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, 即沿任何封闭曲面向外的磁感通量恒为零. 这说明，此时仍可假定磁场的无源性，即

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0. \tag{2.45}$$

在上一段中，我们看到电流会产生磁场，现在又见到变化的磁场会激发电场，这说明电场和磁场是紧密联系着的. 下面我们还要看到：变化的电场也会激发磁场. 这样，电磁场就更紧密地联系在一起了，并由此给出麦克斯韦方程组的完整形式.

# §3. 真空中的麦克斯韦方程组，洛伦兹力

## 3.1. 真空中的麦克斯韦方程组

在前一节中，我们概述了电磁现象的一些实验定律，它们各有其不同的适用范围. 我们的目的是建立有关电磁现象的普遍规律，它应该能完全决定电磁场的运动，适用于一切可能的情形. 这就需要从已知的事实出发，进行由特殊到一般的抽象及推广. 这一推广过程包含了一些假设. 这些假设及其相应的结论的正确性要通过实践的检验来加以证实；而一旦被实验证实以后，就会反过来指导实践，发挥重大的作用.

关于电磁场的普遍规律是由麦克斯韦首先总结出来的，称为麦克斯韦方程组.

为了得到麦克斯韦方程组，先将已有的结果列举如下，然后再看如何向一般情形推广. 这些结果是：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad 或 \quad \int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega \rho\mathrm{d}V, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad 或 \quad \oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0 \quad 或 \quad \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \quad 或 \quad \oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{3.4}$$

及

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\mathrm{d}V=-\int_\Gamma \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{3.5}$$

上述五式适用范围各不相同. (3.1) 式是从库仑定律得来，适用于静电场或由稳定电流产生的电场；(3.4) 式从安培－毕奥－萨伐尔定律得来，适用于静磁场；(3.2) 式是从不稳定的情况总结出来的，但当时的实验还只限于变化较慢的范围，在迅速变化的范围内成立与否还有待于考察；至于 (3.3) 式，它表示磁场无源，即无磁单极存在，至今仍被认为是一个合理的假设；而 (3.5) 式则在一般情况下成立.

现在考虑如何将上述结果推广到一般情况，用于描述电磁场的一般规律.

(3.1) 式虽是从静电场的库仑定律推出来的，但以后未发现与实验相冲突，可以认为它适用于一般情况，即尽管库仑定律在普遍情况不成立，但每个单位正电荷共发出 $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 电通量仍然正确. 对法拉第电磁感应定律，假定其在迅变的情况下也成立，即假设 (3.2) 式对一般情形也正确，从而 (3.3) 式也如此.

以上这些都是不必修改的. 但 (3.4) 式却不能用于不稳定的情况，否则将与电荷守恒定律相矛盾. 事实上，由 (3.4) 式有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = 0.$$

再利用 (3.5) 式，立即有 $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, 即 $\rho$ 从而 $\boldsymbol{j}$ 均与 $t$ 无关，这就化为稳定的情况. 由于电荷守恒定律是由实验证实的普遍规律，因此必须修正 (3.4) 式. 注意到将 (3.1) 式对 $t$ 求导一次可得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{3.6}$$

因此若将 (3.4) 式改为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{j}, \tag{3.7}$$

矛盾就可以得到解决. 事实上，将上式两端作用 div , 得

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right) = 0. \tag{3.8}$$

(3.6) 与 (3.8) 式恰给出电荷守恒律方程 (3.5) 式.

(3.7) 式告诉我们，不仅电流能激发磁场，而且变化的电场也能激发磁场，正像变化的磁场也能激发电场一样. 比较 (3.2) 与 (3.7) 式可以看出，$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 前的符号相反. 这是因为当电场增加时，激发的磁场按右手螺旋法则决定；而当磁场增加时，感应电流要阻止此磁场的增加，应按左手法则决定.

将 (3.1)—(3.3) 及 (3.7) 式联合起来就得到真空中的麦克斯韦方程组，其微分形式为

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, &(3.9)\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, &(3.10)\\
\operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0, &(3.11)\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{B} &= \mu_0\left(\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{j}\right), &(3.12)
\end{aligned}$$

与其相伴还有电荷守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \tag{3.13}$$

我们恒假设 $\rho$ 及 $\boldsymbol{j}$ 满足此方程. 麦克斯韦方程组的前两式决定了电场的散度与旋度，后两式决定了磁场的散度与旋度，并通过第二、第四式把电场及磁场联系起来. 这种联系是电磁场以波动形式运动的根据.

上面得到的麦克斯韦方程组，在最初当然只是一个假定，其正确性是由实践来验证的. 1862 年，麦克斯韦从这组方程得出电磁场的波动性，预言了电磁波的存在，指出其传播速度为光速，并由此提出了光的电磁学说 —— 光是一种电磁波. 20 年后，赫兹 (Hertz) 用实验方法证实了电磁波的存在，从而证实了麦克斯韦的理论. 现在我们知道，不仅各种光波，而且无线电波、热射线、X 射线、$\gamma$ 射线等都是波长在不同范围中的电磁波. 这些都充分证明了麦克斯韦理论的正确性.

这儿我们看到，作为一门物理学科的基本方程组，不仅必须要求在数学上应是一个无矛盾的体系 (相容性)，还应要求和实验及实践结果相一致，而且后者是具根本性的. 麦克斯韦方程组为我们提供了一个重要的例子.

如果已知电荷与电流在电磁场中的分布，则麦克斯韦方程组包含 6 个未知函数 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ 与 $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$，而方程组中形式上共包含 8 个方程，个数比未知函数多了两个. 但我们可以指出，这个方程组中具有本质上重要性的是

$$\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{j}, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \mathbf{0}, \tag{3.15}$$

共 6 个方程. 事实上, 由前所述, 只要在 $t=0$ 时成立 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$, 则它对一切 $t$ 必自动满足. 这只要在 (3.15) 式两端作用散度 div 即可证得. 同样地, 在成立电荷守恒定律 (3.13) 式时, 只要在 $t=0$ 时 (3.9) 式成立, 则它必对一切 $t$ 成立. 为说明这一点, 只要在 (3.14) 式两端作用散度 div, 并注意到 (3.13) 式, 就有

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0.$$

因此 (3.9) 式只要在 $t=0$ 时成立, 必对一切 $t$ 成立. 这样, 麦克斯韦方程组中两个不包含对 $t$ 导数的方程 (3.9) 及 (3.11) 只化为对初值应满足的附加要求, 我们只需重点考察由 6 个方程组成的方程组 (3.14)—(3.15). 关于这个方程组的数学结构, 在以后还要专门讨论.

### 3.2. 洛伦兹力

如果电荷及其运动的情况没有给定, 为了决定电磁场, 必须将麦克斯韦方程组和带电体的运动方程联立起来求解. 为此, 要讨论电磁场对电荷及电流的作用力.

先将我们已知的事实归纳如下: 首先, 静止电荷在静电场中要受到力的作用. 这时单位体积的电荷所受的力, 即力的体积密度 (简称力密度) 为

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E}. \tag{3.16}$$

另外, 稳定电流在静磁场中要受到力的作用. 此时, 单位体积的电流所受的力, 即力密度为

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}. \tag{3.17}$$

洛伦兹将上述力的公式, 推广到真空中运动的带电体在电磁场中的一般情况. 对于运动的带电体, 由于电荷及电流同时存在, 故同时受到电场与磁场的作用力. 洛伦兹假定, 不论带电体的运动状态如何, 对一般的电磁场, 力密度 (单位体积所受的力) 都由下式决定:

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{3.18}$$

或

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \tag{3.19}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为电荷流动的宏观速度. 上式称为 *洛伦兹力公式*. 其中, 第一项代表该单位体积中的电荷所受的电场的作用力, 而第二项代表上述电荷运动所形成的电流所受的磁场的作用力. 需要注意的是: 上式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示该单位体积处总的电场和磁场, 包括带电体本身所激发的电场和磁场在内.

洛伦兹力公式也已在实践中得到证实.

麦克斯韦方程组、洛伦兹力公式以及电荷守恒定律在一起构成了电动力学的基础. 将它们联立起来, 再加上带电体的力学运动方程, 就可以完全地决定电磁场和电荷的运动. 这在今后讨论磁流体力学方程组 (见第三章) 时将会具体看到, 那时将研究带电流体在电磁场中的运动.

## §4. 电磁能量和电磁动量，能量、动量守恒与转化定律

现在我们利用已得到的电磁现象的基本规律 —— 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式, 来揭示电磁能量和电磁动量的存在, 并给出其定量的表达式, 同时揭示能量、动量的守恒和转化定律. 对于一种新的能量形态或动量形态的认识, 总是通过它们与已熟知的能量形态和动量形态之间的相互转化并在总体上保持守恒的关系来达到的. 下面通过考察电磁场中带电体总机械能量和总机械动量的变化, 来认识电磁能量与电磁动量.

### 4.1. 电磁能量, 能量守恒与转化定律

现研究在真空中运动的带电体受电磁场作用而引起的总机械能量 $U_m$ 的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t}$. 在没有其他形式的能量输入的情况下, 利用洛伦兹力公式 (3.19),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int_\Omega(\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V\\ &= \int_\Omega\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int_\Omega\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{4.1}$$

由麦克斯韦方程 (3.14), 有

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial(E^2)}{\partial t}, \tag{4.2}$$

这里以 $E$ 表示 $|\boldsymbol{E}|$. 注意到

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B},$$

并利用麦克斯韦方程 (3.15), 可以将 (4.2) 式改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}-\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}))-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial(E^2)}{\partial t}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\mathrm{div}\,\boldsymbol{S},\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $B=|\boldsymbol{B}|$, 而

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{4.4}$$

称为坡印亭 (Poynting) 向量.

这样, 由 (4.1) 式, 并利用格林公式, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}V-\int_\Omega\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}\mathrm{d}V\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}V-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

由于积分区域包括了整个电磁场空间, 故上式右端在边界上的积分应为零. 于是

$$\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}V. \tag{4.5}$$

这说明, 电磁场变化时, 带电体的总机械能将随之发生变化; 当电磁场恢复原状时, 此能量也恢复到原来的数值. 这表明能量 $U_m$ 的变化并不意味着它被消灭或创生, 而是转化为另一种形式的能量即电磁能量. 由 (4.5) 式知, $U_m$ 的增加值等于

$$U_{e,m}=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}V \tag{4.6}$$

的减少值，因此 $U_{e,m}$ 应是电磁能量的定量表达式，而 (4.5) 式即代表电磁能量守恒与转化定律.

### 4.2. 电磁动量，动量守恒与转化定律

在没有其他形式的外力作用的情况下，根据洛伦兹力公式 (3.19)，带电体的总机械动量 $\boldsymbol{G}_m$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_m}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega \boldsymbol{f}\mathrm{d}V=\int_\Omega(\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V. \tag{4.7}$$

下面我们证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_m}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}\mathrm{d}V, \tag{4.8}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 为由 (4.4) 式定义的坡印亭向量，而 $c\stackrel{\mathrm{d}}{=}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.997\,925\times 10^8$ 米 / 秒 (m/s) 为真空中的光速. (4.8) 式表明，电磁场的变化将带来带电体机械动量的变化；而电磁场恢复原状时，带电体的动量亦恢复原值. 因此动量的变化并不意味着它被消灭或创生，而是转化为另一种形式的动量即电磁动量，其定量表达式为

$$\boldsymbol{G}_{e,m}=\int_\Omega\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}\mathrm{d}V. \tag{4.9}$$

(4.8) 式代表动量守恒与转化定律.

**(4.8) 式的证明**　由麦克斯韦方程 (3.9) 及 (3.12)，有

$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_0\mathrm{div}\,\boldsymbol{E},\\ \rho\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{j}=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}},\end{aligned}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{E}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$. 将其代入洛伦兹力公式 (3.19)，得

$$\boldsymbol{f}=\varepsilon_0(\mathrm{div}\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\left(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}\right)\times\boldsymbol{B}. \tag{4.10}$$

再由麦克斯韦方程组的另两个方程 (3.10) 与 (3.11)，有

$$\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+\varepsilon_0(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{B}})\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \tag{4.11}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{B}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$. 将 (4.10) 式与 (4.11) 式相加，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \varepsilon_0(\operatorname{div}\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}(\operatorname{div}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}\\&\quad+\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}\right)\times\boldsymbol{B}+\varepsilon_0(\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{B}})\times\boldsymbol{E}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

为化约 (4.12) 式的右端，我们先证一个向量分析中的公式:

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}=\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E})-\frac{1}{2}\operatorname{grad}(E^2),\tag{4.13}$$

其中 $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}$ 为向量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的张量积 (见附录一) 即并矢，写为矩阵形式为

$$\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}E_x^2 & E_xE_y & E_xE_z\\ E_yE_x & E_y^2 & E_yE_z\\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2\end{pmatrix},$$

而 $\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E})$ 则为此二阶张量的散度，即由上矩阵中列向量的散度所组成的行向量.

实际上，容易看出 $(\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E})$ 在 $x$ 方向的分量为

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E})_x=\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)E_z-\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)E_y.$$

这样， (4.13) 式的左端在 $x$ 方向的分量为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)E_x+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)E_z\\&-\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)E_y.\end{aligned}$$

而 (4.13) 式的右端在 $x$ 方向的分量为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(E_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(E_yE_x)+\frac{\partial}{\partial z}(E_zE_x)-E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}\\&-E_y\frac{\partial E_y}{\partial x}-E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)E_z \\
&\quad -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)E_y,
\end{aligned}
$$

它与 (4.13) 式的左端在 $x$ 方向的分量相等. 对在 $y$ 及 $z$ 方向的分量可同样验证. 这样便证明了 (4.13) 式.

同理

$$
(\operatorname{div}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}=\operatorname{div}(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B})-\frac{1}{2}\operatorname{grad}(B^2). \tag{4.14}
$$

利用 (4.13) 与 (4.14), 可将 (4.12) 式写为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= -\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)\boldsymbol{I}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B}\right) \\
&\quad -\varepsilon_0(\dot{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\times\dot{\boldsymbol{B}}),
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位二阶张量, 即单位矩阵. 在得到上式的过程中, 我们还利用了显然的关系式

$$
\operatorname{grad}(E^2)=\operatorname{div}(E^2\boldsymbol{I}),\qquad \operatorname{grad}(B^2)=\operatorname{div}(B^2\boldsymbol{I}).
$$

由此, 并注意到坡印亭向量的定义 (4.4), 立即有

$$
\boldsymbol{f}=-\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial t}, \tag{4.15}
$$

其中 $c$ 为真空中的光速, 而

$$
\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\boldsymbol{I}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B}. \tag{4.16}
$$

由 (4.7) 与 (4.15), 并利用格林公式, 就得到

$$
\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}\mathrm{d}V-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{4.17}
$$

这儿及今后, $\boldsymbol{\Phi n}$ 表示通常意义下矩阵与向量的乘积. 类似于电磁能量的情况, 上式右端第二项为零. 这就证明了 (4.8) 式.

### 4.3. 电磁能量 (动量) 密度，电磁能量流 (动量流) 密度

现在让我们考察电磁场中的一个任意给定的区域 $\Omega$. 将 (4.3) 式在 $\Omega$ 上积分，并利用格林公式，得到

$$\int_\Omega \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \quad (4.18)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为单位外法线向量. 由 (4.1) 式知，上式左端第一项为 $\Omega$ 中带电体的总机械能的变化率 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_m(\Omega)$. 这样，(4.18) 式表明单位时间内在 $\Omega$ 中的总能量 (带电体的总机械能与电磁能量之和) 的增加等于向量 $\boldsymbol{S}$ 通过 $\partial\Omega$ 向内流入的通量，即流入的电磁能量. 于是将

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

称为电磁能量密度 (即单位体积内的电磁能量)，而坡印亭向量

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \quad (4.19)$$

又称为电磁能量流密度向量. (4.18) 式是在任一给定的有限区域上的能量守恒与转换定律，而 (4.3) 式则为其微分形式.

对于动量可类似地进行讨论. 将 (4.15) 式在 $\Omega$ 上积分，并利用格林公式，就得到

$$\int_\Omega \boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_m(\Omega)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \quad (4.20)$$

其中 $\boldsymbol{G}_m(\Omega)$ 表示 $\Omega$ 中带电体的总机械动量. (4.20) 式表明单位时间内在 $\Omega$ 中的总动量 (带电体的总机械动量与电磁动量之和) 的增量等于 $\boldsymbol{\Phi}$ 通过 $\partial\Omega$ 向内流入的通量. 于是，将

$$\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

称为电磁动量密度向量，而将 $\boldsymbol{\Phi}$ 称为电磁动量流密度张量，其意义是：$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为单位时间内沿法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向、经面积微元 $\mathrm{d}S$ 流过的电磁动量. (4.20) 式为在任一给定的有限区域上的动量守恒与转化定律，而 (4.15) 式则为其微分形式.

# §5. 麦克斯韦方程组的数学结构，电磁场的波动性

## 5.1. 麦克斯韦方程组的数学结构

在 §3 中我们曾指出，如果已知电荷与电流在电磁场中的分布，则麦克斯韦方程组中具有本质上重要性的是如下包含 6 个未知函数 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的 6 个方程：

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = -\mu_0\boldsymbol{j}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \tag{5.2}$$

它是个一阶偏微分方程组. 下面我们来考察它的数学结构.

引入向量

$$U = (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)^{\mathrm{T}},$$

其中上角 "T" 表示矩阵的转置，则方程组 (5.1)—(5.2) 可以写为

$$A_0\frac{\partial U}{\partial t} + A_1\frac{\partial U}{\partial x} + A_2\frac{\partial U}{\partial y} + A_3\frac{\partial U}{\partial z} = F, \tag{5.3}$$

其中

$$A_0 = \mathrm{diag}(\varepsilon_0\mu_0, \varepsilon_0\mu_0, \varepsilon_0\mu_0, 1, 1, 1)$$

为对角阵，而

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = -\mu_0(j_x, j_y, j_z, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

由上可见，一阶偏微分方程组 (5.3) 中一阶偏导数前的系数矩阵有以下的特点：$\dfrac{\partial U}{\partial t}$ 前的系数阵 $A_0$ 为对称正定阵，$\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ 前的系数阵 $A_1$ 、 $A_2$ 及 $A_3$ 为对称阵. 这样的一阶偏微分方程组称为 一阶对称双曲型方程组. 这是一种和普通的二阶双曲型方程类似的特殊类型的双曲型方程组，对于它，弗里德里克斯 (K. O. Friedrichs) 及谷超豪已分别在线性及拟线性的情形建立了系统的理论 (见 [14] 及 [6]). 以后我们可以看到，很多重要的数学物理偏微分方程均可以写为线性或拟线性的一阶对称双曲组的形式. 这是一类具有很大重要性的数学物理方程. 下面对这类方程组作一简单介绍.

### 5.2. 一阶对称双曲型偏微分方程组

为简单计，我们只讨论线性的情况. 麦克斯韦方程组 (5.1)—(5.2) 即属于这一情况.

一般的一阶线性偏微分方程组可写为如下形式：

$$LU \stackrel{\mathrm{d}}{=} A_0 \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial U}{\partial x_k} + CU = F, \tag{5.4}$$

其中 $U = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}$, 而 $A_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 及 $C$ 为 $t$ 及 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的适当光滑的 $N \times N$ 矩阵函数，$F$ 为依赖于 $t$ 及 $x$ 的 $N$ 维列向量.

若 $A_0$ 为对称正定阵，$A_k$ $(k = 1, \cdots, n)$ 是对称阵，则称方程组 (5.4) 为 一阶对称双曲组.

研究这类方程组的基本方法是 能量积分方法. 对一阶对称双曲组 (5.4) 可以提两类定解问题： 柯西 (Cauchy) 问题 (初值问题) 与初－边值问题.

所谓柯西问题，即在 $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ $(T > 0)$ 中求方程组 (5.4) 的

解 $U=U(t,x)$, 使其满足

$$U(0,x)=U_0(x), \tag{5.5}$$

这里 $U_0(x)$ 为给定的向量函数.

下面我们用能量积分方法证明柯西问题 (5.4)—(5.5) 解的唯一性. 为此, 先给出一个能量不等式. 对所考察区域中的任一点 $P(t^P,x^P)$, 类似于波动方程的特征锥, 我们作一过 $P$ 点的曲面 $S_P$, 使其至多除 $P$ 点外是光滑的, 且关于算子 $L$ 是 弱类空向 的, 即对 $S_P$ 上除 $P$ 点外的任意点 $Q$, 矩阵

$$n_0A_0+\sum_{k=1}^n n_kA_k$$

均是半正定的, 其中 $(n_0,n_1,\cdots,n_n)$ 为曲面在该点的一个法向量. 显然, 超平面 $t=$ 常数一定是弱类空向的. 设初始平面 $t=0$ 与 $S_P$ 围成一个有界区域. 对任意给定的 $t<t^P$, 记此有界区域被平面 $t=t$ 所截的部分为 $\Omega_t$, $S_P$ 夹在 $t=0$ 与 $t=t$ 中的部分为 $\Sigma_t$, 而 $t=0$, $t=t$ 与 $\Sigma_t$ 所围的区域则记为 $Q_t$. 在区域 $Q_t$ 中考察方程组 (5.4). 将 $U$ 与方程组 (5.4) 作数量积, 易知可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(U^{\mathrm T}A_0U)+\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}(U^{\mathrm T}A_kU)+2U^{\mathrm T}KU=2U^{\mathrm T}F, \tag{5.6}$$

其中

$$K=C-\frac{1}{2}\frac{\partial A_0}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{\partial A_k}{\partial x_k}. \tag{5.7}$$

将 (5.6) 式在 $Q_t$ 上积分, 并利用格林公式, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t}U^{\mathrm T}A_0U\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}U^{\mathrm T}A_0U\mathrm{d}x\\&+\int_{\Sigma_t}\Big(U^{\mathrm T}A_0U\cos(\boldsymbol{n},t)+\sum_{k=1}^nU^{\mathrm T}A_kU\cos(\boldsymbol{n},x_k)\Big)\mathrm{d}S\\&+2\int_{Q_t}U^{\mathrm T}KU\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=2\int_{Q_t}U^{\mathrm T}F\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\Sigma_t$ 上的单位外法线向量.

由 $A_0$ 的正定性与有界性知，存在正常数 $\sigma_1$ 及 $\sigma_2$, 使

$$\int_{\Omega_t} U^{\mathrm{T}} A_0 U \mathrm{d}x \geqslant \sigma_1 \|U(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_t)}, \tag{5.9}$$

$$\left|\int_{\Omega_0} U^{\mathrm{T}} A_0 U \mathrm{d}x\right| \leqslant \sigma_2 \|U(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_0)}. \tag{5.10}$$

由 $\Sigma_t$ 关于 $L$ 的弱类空向性，有

$$\int_{\Sigma_t} (U^{\mathrm{T}} A_0 U \cos(\boldsymbol{n}, t) + \sum_{k=1}^{n} U^{\mathrm{T}} A_k U \cos(\boldsymbol{n}, x_k)) \mathrm{d}S \geqslant 0. \tag{5.11}$$

我们暂且假定 $K$ 在 $Q_t$ 上是正定的，即在 $Q_t$ 上成立

$$U^{\mathrm{T}} K U \geqslant \sigma_3 |U|^2, \tag{5.12}$$

其中 $\sigma_3$ 为一正常数．在这个假定下，有

$$\int_{Q_t} U^{\mathrm{T}} K U \mathrm{d}x \mathrm{d}\tau \geqslant \sigma_3 \|U\|^2_{L^2(Q_t)}. \tag{5.13}$$

又显然有

$$\left|\int_{Q_t} 2U^{\mathrm{T}} F \mathrm{d}x \mathrm{d}\tau\right| \leqslant 2\sigma_3 \|U\|^2_{L^2(Q_t)} + (2\sigma_3)^{-1} \|F\|^2_{L^2(Q_t)}. \tag{5.14}$$

由 (5.8)—(5.11)、(5.13) 和 (5.14) 式，不难得到如下估计：

$$\|U(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_t)} \leqslant \sigma \left( \|U_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|F(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\tau)} \mathrm{d}\tau \right), \tag{5.15}$$

其中 $\sigma$ 为一正常数．

现在说明假设 (5.12) 式的合理性．事实上，若 (5.12) 式不满足，代替 $U$ 引进新的未知向量函数

$$V = \mathrm{e}^{-\lambda t} U,$$

其中 $\lambda$ 为一待定的正常数．易知 $V$ 满足方程组

$$A_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial V}{\partial x_k} + (C + \lambda A_0) V = \mathrm{e}^{-\lambda t} F.$$

由于 $A_0$ 的正定性，容易验证对于这个方程组，只要选取 $\lambda$ 充分大，总能使条件 (5.12) 成立．因此，我们总可以得到形如 (5.15) 的能量估计式．

由能量估计式 (5.15)，立即可得柯西问题 (5.4)—(5.5) 解的唯一性．至于解的存在性的证明，也可以用能量估计方法得到，这里我们就不讨论了．有兴趣的读者可参阅 [11]、[4] 与 [10]．

由能量不等式 (5.15) 还可得到方程组 (5.4) 的柯西问题的解具有有限依赖区域．实际上，容易验证对任一给定点 $P(t^P, x^P)$，过 $P$ 点的锥面

$$|x - x^P| = a(t^P - t), \qquad 0 < t < t^P$$

当 $a$ 充分大时是弱类空向的．因此，解在 $P$ 点的值，只依赖于初值 $U_0$ 在 $x$ 空间中的球 $|x - x^P| \leqslant at^P$ 中的值．由解具有有限依赖区域即得扰动具有有限的传播速度．这显示了方程组 (5.4) 的双曲性．

下面讨论方程组 (5.4) 的初 - 边值问题．设 $\Omega$ 为 $x$ 空间中具有光滑边界 $\Gamma$ 的有界区域．记 $Q = (0, T) \times \Omega$，其中 $T$ 为任一给定的正数．所谓初 - 边值问题即在 $Q$ 中求方程组 (5.4) 的解，使其在 $t = 0$ 时满足初始条件

$$U(0, x) = U_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.16}$$

而在 $t \in (0, T)$ 时满足边界条件

$$MU = 0, \text{ 在} \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \text{ 上}, \tag{5.17}$$

其中 $\partial\Omega$ 表示 $\Omega$ 的边界，$M$ 为一个 $p \times N$ 矩阵，其秩为 $p \leqslant N$．

(5.17) 为线性齐次边界条件的一般形式．它表示在侧面 $\Sigma$ 的每一点上，$U$ 应满足 $p$ ($\leqslant N$) 个线性独立的线性方程．在 $\Sigma$ 上每一点，齐次线性代数方程组 (5.17) 的解组成 $\mathbb{R}^N$ 的一个 $N - p$ 维的子空间 $\pi$．这样，要求 $U$ 在侧面 $\Sigma$ 上满足边界条件 (5.17)，相当于要求 $U$ 在侧面 $\Sigma$ 上的每一点属于 $\mathbb{R}^N$ 中的相应的子空间 $\pi$．所以边界条件 (5.17) 也可以写为如下的形式：

$$U \in \pi, \text{ 在} \Sigma \text{ 上}. \tag{5.18}$$

下面我们考察，为了得到初 - 边值问题 (5.4) 及 (5.16)—(5.17) 的解的唯一性，对子空间 $\pi$ 应有何种要求．在区域 $Q_t = (0, t) \times \Omega$

(其中 $t < T$) 中积分 (5.6) 式, 并利用格林公式, 类似于 (5.8) 式可得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} U^{\mathrm{T}} A_0 U(t,x)\mathrm{d}x - \int_{\Omega} U^{\mathrm{T}} A_0 U(0,x)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Sigma_t} U^{\mathrm{T}} A U \mathrm{d}S + \int_{Q_t} 2U^{\mathrm{T}} K U \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ = &\int_{Q_t} 2U^{\mathrm{T}} F \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{5.19}$$

其中 $\Sigma_t = (0,t) \times \partial\Omega$, 而

$$A = \sum_{k=1}^{n} \cos(\boldsymbol{n}, x_k) A_k, \tag{5.20}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法线向量. 如同对柯西问题解的估计那样, 不难看出, 只要满足边界条件 (5.17) 的 $U$ 能使二次型

$$U^{\mathrm{T}} A U \tag{5.21}$$

在 $\Sigma$ 上是非负的, 即对 $\Sigma$ 上的每一点, $\pi$ 均为上述二次型的非负子空间, 那么由 (5.19) 式立即可得如下的能量估计:

$$\begin{aligned} \|U(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \sigma \left( \|U_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|F(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}\tau \right), \\ 0 < t < T, \end{aligned} \tag{5.22}$$

其中 $\sigma$ 为一可能与 $T$ 有关的正常数.

由能量估计 (5.22), 立即得到初 - 边值问题解的唯一性. 那么 $\pi$ 为二次型 (5.21) 的非负子空间这一条件能否保证初 - 边值问题 (5.4) 及 (5.16)—(5.17) 解的存在性呢? 回答一般来说是否定的. 因为若有一组边界条件使 $\pi$ 为二次型 (5.21) 的非负子空间, 且初 - 边值问题存在唯一解, 则在此基础上, 在边界 $\Sigma$ 上再人为地添加一些线性齐次边界条件, 空间 $\pi$ 将变小, 因而仍能使二次型 (5.21) 在其中保持非负. 但一般来说, 这时我们不能指望定解问题仍有解存在. 鉴于这个理由, 为了保证解的存在性, 我们应该要求边界空间 $\pi$ 在所有使二次型 $U^{\mathrm{T}}AU$ 保持非负的子空间中为最大的, 即不存在一个使 $U^{\mathrm{T}}AU$ 保持非负的空间以 $\pi$ 为真子空间. 这种 $\pi$ 称为 $U^{\mathrm{T}}AU$ 的最大非负子空间. 如果边界条件 (5.17) 在 $\Sigma$ 上每一点所对应的边界空间 $\pi$ 均为 $U^{\mathrm{T}}AU$

的最大非负子空间，那么这个边界条件称为关于算子 $L$ 是 *合格* 的. 可以证明，如果侧面 $\Sigma$ 关于算子 $L$ 为非特征，即矩阵 $A$ 在 $\Sigma$ 上点点非异，那么 $U^{\mathrm{T}}AU$ 的最大非负子空间的维数等于 $A$ 的正特征值的个数. 在一定的附加假设下，还可以证明具有合格边界条件的初－边值问题解的存在性. 对于上述这些内容，有兴趣的读者可参阅 [14] 与 [10].

这样，由前面的讨论知，麦克斯韦方程组 (5.1)—(5.2) 的柯西问题及具有合格边界条件的初－边值问题是适定的. 相应的能量估计 (5.15) 及 (5.22) 左端的能量积分恰分别为电磁场在 $\Omega_t$ 与 $\Omega$ 中的电磁能量 (相差一个常数因子). 此外，电磁场中的扰动具有有限的传播速度，即电磁场具有波动性. 这一点我们在下一段进一步予以讨论.

### 5.3. 电磁场的波动性，自由电磁波

现在从麦克斯韦方程组出发，进一步揭示电磁场的波动性. 这种以波动形式传播的电磁场就称为 *电磁波*. 这一认识标志着物理学发展到一个新阶段. 一方面在此基础上把光和电磁场统一起来，随后并将这种统一扩展到热射线、X 射线和 $\gamma$ 射线，从而在揭示物质的微观结构中起了重大作用. 另一方面，由于电磁波在实践中取得日益广泛的重要应用，也推动了电动力学更迅速地发展.

将方程 (5.1) 对 $t$ 求导一次，并利用方程 (5.2) 消去 $\boldsymbol{B}$，就得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}, \tag{5.23}$$

其中利用了 $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. 由向量分析公式

$$\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{E}=\mathrm{grad\ \ div}\,\boldsymbol{E}-\Delta\boldsymbol{E} \tag{5.24}$$

以及方程 (3.9)，可以将 (5.23) 改写为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\Delta\boldsymbol{E}=-\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{grad}\,\rho+\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\right). \tag{5.25}$$

上式说明，在 $\rho$ 及 $\boldsymbol{j}$ 给定时，$\boldsymbol{E}$ 满足非齐次 *波动方程*.

类似地，代替消去 $\boldsymbol{B}$ 而消去 $\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{B}$ 满足相应的非齐次波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}-\Delta\boldsymbol{B}=\mu_0\mathrm{rot}\boldsymbol{j}. \tag{5.26}$$

事实上，将方程 (5.2) 对 $t$ 求导一次，利用方程 (5.1)、向量分析公式 (5.24)（将其中 $\boldsymbol{E}$ 换为 $\boldsymbol{B}$）以及 (3.11)，立即可得 (5.26) 式.

这样，$\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 满足波动方程所描述的性质. 这说明 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 以波的形式运动变化，而电荷及电流作为非齐次项即为它们的源，可以激发或吸收电磁波. 根据波动的性质，已经激发并传播出去的电磁波，即使当激发它的源消失之后，仍将继续存在并传播. 因此，我们得到如下结论：*电磁场可以脱离电荷与电流而单独存在，并在一般情况下以波的形式运动和传播；它可以与电荷及电流相互作用（电磁场对电荷及电流的作用即洛伦兹力），但它的存在并不以电荷及电流的存在为前提*. 此外，从波动方程的性质知道，*在真空中电磁波的传播速度为光速* $c$，这是光的电磁理论的重要根据之一.

由上所述可知，即使没有电荷及电流，也可能有电磁波存在. 这种电磁波称*自由电磁波*. 此时满足齐次波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \tag{5.27}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}. \tag{5.28}$$

数理方程中学过的求解这一方程的各种技巧，可以完全照搬到这儿来.

这里特别考察*平面电磁波解*. 波动方程在一般情形下的解可以通过叠加由它们得到. 因此这一讨论具有一般性的意义.

所谓*平面波*，是指如下形式的解：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \theta)}, \tag{5.29}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{E}_0$ 是常向量. 对固定的 $t$，它在 $(x, y, z)$ 空间的任一超平面

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \theta = 常数 \tag{5.30}$$

上取常数值，$\boldsymbol{k}$ 为此超平面的法线方向；当 $t$ 变动时，取同一常数值的超平面变为另一与之平行的超平面，其上解取同一数值. 于是此解沿 $\boldsymbol{k}$ 方向以平面波的方式传播. 在上式中取 $\omega$ 为波的圆频率：$\omega = 2\pi\nu$. 在 $t$ 经过一个周期 $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 时，波经过一个波长 $\lambda$ 的距离，而原先的超平面

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \theta = a(常数)$$

变为使 $\boldsymbol{E}$ 取同一值的超平面 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(t+T)+\theta=a$, 即

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta=a+\omega T.$$

此二超平面之间距离应为 $\lambda=\dfrac{\omega T}{|\boldsymbol{k}|}=\dfrac{2\pi}{k}$, 其中 $k=|\boldsymbol{k}|$. 因此在上述平面波解中，若 $\omega$ 取为圆频率， $k$ 应为 $\dfrac{2\pi}{\lambda}$, 而 $\lambda$ 为波长. $\boldsymbol{k}$ 称为波向量, 其方向为波传播的方向.

将平面波解 (5.29) 代入波动方程 (5.27), 得

$$\frac{1}{c^2}\omega^2-k^2=0,\ 即 k=\frac{\omega}{c}. \tag{5.31}$$

由此，波速 = 波长 × 频率 = $\lambda\times\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{\omega}{k}=c$. 这也证明了电磁波的传播速度是光速 $c$.

现考察平面波解

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta)}, \tag{5.32}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta)}. \tag{5.33}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不是互相独立地变化，而是由麦克斯韦方程组相联系. 因此在上二式中必须采用相同的 $\boldsymbol{k}$, $\omega$ 及 $\theta$, 这只要将它们代入麦克斯韦方程组即可看出. 此外，由于对自由电磁波而言 $\rho\equiv 0$, 由 (3.9) 式应有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0. \tag{5.34}$$

类似地，由 (3.11) 式有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0=0. \tag{5.35}$$

将 (5.32) 与 (5.33) 分别代入 (3.10) 与 (3.12) 式 (注意此时 $\boldsymbol{j}\equiv 0$), 可得

$$\boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0, \tag{5.36}$$
$$\boldsymbol{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0. \tag{5.37}$$

在 (5.35)、(5.36) 和 (5.37) 三式中，(5.36) 是基本的. 因为它显然包含 (5.35) 式. 它亦包含 (5.37) 式，因为

$$-\frac{c^2}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0=-\frac{c^2}{\omega^2}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)=\frac{c^2}{\omega^2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)\times\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{c^2}{\omega^2}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}_0-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)\boldsymbol{k}]=\boldsymbol{E}_0.$$

这里我们用了 (5.31) 与 (5.34) 式. 这样，对平面电磁波解 (5.32)–(5.33)，有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0,\qquad \boldsymbol{B}_0=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0. \tag{5.38}$$

由此可知 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}_0$ 及 $\boldsymbol{B}_0$ (从而 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$) 三者互相垂直 (见图 1). 于是可得，在自由电磁波中，每处的电场强度和磁感强度方向总是垂直的，并和那儿的电磁波传播方向垂直. 因此，电场和磁场的振荡方向都和波的传播方向垂直，故 *电磁波是横波*.

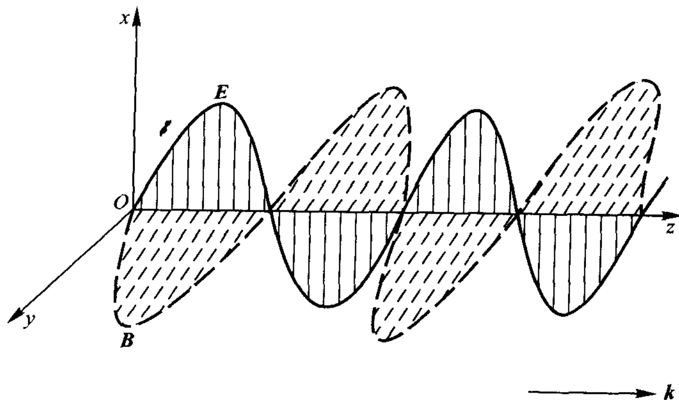



图 1

这里指出，自由电磁波是横波的这一性质是

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0 \tag{5.39}$$

及

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0 \tag{5.40}$$

的推论. 因此上述条件称为 横波条件, 即所论场为无源场. 满足横波条件的场, 即无源场, 又称为 横场.

顺便指出, 若一平面波

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta)}$$

满足条件

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}, \tag{5.41}$$

则有

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}_0=\boldsymbol{0}. \tag{5.42}$$

上式说明, 波的振动方向和传播方向平行, 因而为 纵波. 而 (5.41) 称为 纵波条件, 即所论场为无旋场. 满足纵波条件的场, 即无旋场, 又称为 纵场.

## §6. 电磁场的标势与矢势

在静电场中, 可用静电势 $\phi$ 来描述静电场, 而电场强度 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\phi$. 由于 $\phi$ 是一个标量函数, 而 $\boldsymbol{E}$ 是一个向量函数, 用静电势来描述静电场可以给讨论带来很大的方便. 当然, 静电势 $\phi$ 不是唯一决定的, 可以相差一个任意常数, 但这对最后决定的电场没有影响.

在本节中, 我们要说明, 对于一般情形下在真空中的电磁场, 也可以引入势函数来描述场的运动以及它与电荷、电流的作用, 但这时我们应同时利用 标量势 (标势) 和 向量势 (矢势).

### 6.1. 预备知识

**引理 6.1.** *一向量场 $\boldsymbol{B}$ 若为横场, 即满足*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{6.1}$$

*则它必可表示为另一向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度:*

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}; \tag{6.2}$$

反之亦然.

**证明** 不妨取 $A_z=0$, 即求 $\boldsymbol{A}=(A_x(x,y,z),A_y(x,y,z),\,0)$ 使其满足

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z}=B_x,\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}=B_y,\quad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B_z. \tag{6.3}$$

对前两个方程积分得

$$A_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)\mathrm{d}z+f(x,y), \tag{6.4}$$

$$A_x(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)\mathrm{d}z+g(x,y), \tag{6.5}$$

其中 $(x_0,y_0,z_0)$ 为场中任意选定的一点， $f$ 及 $g$ 为 $(x,y)$ 的任意函数. 将 (6.4)—(6.5) 式代入 (6.3) 的第三个方程，并利用条件 (6.1), 易知可得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=B_z(x,y,z_0). \tag{6.6}$$

因此，只要选取 $f$ 及 $g$ 满足上式，由 (6.4)—(6.5) 式即给出所求的 $\boldsymbol{A}$. 特别可取

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)\mathrm{d}x,\quad g\equiv 0.$$

这样，取

$$\begin{aligned}A_x(x,y,z) &= \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)\mathrm{d}z,\\ A_y(x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)\mathrm{d}z+\int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)dx,\\ A_z(x,y,z) &= 0,\end{aligned}$$

即有 (6.2) 式. 其逆是显然的. 证毕.

**注 6.1.** 这样决定的 $\boldsymbol{A}$ 自然不是唯一的. 显然，若 $\boldsymbol{A}$ 满足上述引理的要求，则对任意的标量函数 $\psi$, $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}\psi$ 仍满足同样的要求. 下面的引理 6.2 说明， $\boldsymbol{A}$ 的选取只有这样一个自由度.

**引理 6.2.** 若向量 $\boldsymbol{A}$ 为纵场，即满足

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}, \tag{6.7}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 必为某个标量场的梯度:

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\psi;$$

反之亦然.

**证明** 条件 (6.7) 说明

$$A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$$

为一全微分, 因此取

$$\psi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z + \psi_0$$

即满足引理要求, 其中 $\psi_0$ 为一任意常数. 其逆是显然的. 证毕.

**引理 6.3.** 任一向量场均可分解为纵场和横场两部分的叠加, 即分解为无旋场和无源场的叠加.

**证明** 对任一向量场 $\boldsymbol{A}$, 我们要证明必存在标量场 $\psi$ 与向量场 $\boldsymbol{C}$ 使

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\psi + \mathrm{rot}\boldsymbol{C}. \tag{6.8}$$

注意到 $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{C} = 0$, 在上式两端作用散度算子 div , 有

$$\Delta\psi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}.$$

取 $\psi$ 为上述泊松方程的一个特解, 由于

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\,\psi) = 0,$$

由引理 6.1, 必存在 $\boldsymbol{C}$ 使

$$\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{rot}\boldsymbol{C}.$$

这就证明了 (6.8) 式. 引理证毕.

由引理 6.3 及注 6.1, 我们得到如下结论: 若一向量场 $\boldsymbol{B}$ 为横场, 即满足 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, 则它一定可表示为另一向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度: $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$. 这种 $\boldsymbol{A}$ 的决定不是唯一的, 可以有相差一个梯度函数

$\mathrm{grad}\,\psi$ 的自由度, 其中 $\psi$ 为任意标量函数. 由于 $\mathrm{grad}\,\psi$ 是一个纵场, $\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\psi$ 仍具有和 $\boldsymbol{A}$ 同样的性质, 这说明 $\boldsymbol{A}$ 可以加上任一纵场而不改变其性质. 于是, *在引理 6.1 中向量场 $\boldsymbol{A}$ 的纵场分量可取为零, 即可设 $\boldsymbol{A}$ 为横场:* $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$. 在下面讨论静磁场时即将如此处理 (见 §8.3).

**6.2. 电磁场的标势与矢势**

在电磁场中, 磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的散度恒为零, 即 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$. 利用引理 6.1, 磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 一定可表示为某个向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}. \tag{6.9}$$

这儿, $\boldsymbol{A}$ 只是其横场部分有确定的意义, 其纵场部分可以任意选取, 且有如注 6.1 所述的自由度.

对于电场强度 $\boldsymbol{E}$, 已不能像静电场那样引入静电势, 因 $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 一般不为零. 但由麦克斯韦方程 (3.10) 和 (6.9) 式有

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{0}, \tag{6.10}$$

因而由引理 6.2, 必存在标量场 $\phi$, 使

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,\phi. \tag{6.11}$$

这样, 总起来有

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}, \tag{6.12}$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{6.13}$$

这里的 $\phi$ 及 $\boldsymbol{A}$ 分别称为电磁场的 *标量势* (*标势*) 和 *向量势* (*矢势*). 磁感强度只与矢势 $\boldsymbol{A}$ 有关; 但和静电场的情形不同, 一般地说, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不仅与标势 $\phi$ 有关, 而且和矢势 $\boldsymbol{A}$ 有关.

由前述, 若 $\boldsymbol{A}$ 满足(6.12)式, 则对任意给定的函数 $\psi=\psi(t,x,y,z)$, $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\psi$ 也满足同样的条件. 代入 (6.13) 式, 可得 $\boldsymbol{A}'$ 及

$\phi' = \phi - \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ 满足同样的条件 (6.12) 和 (6.13). 这就是说，若 $\boldsymbol{A}$ 及 $\phi$ 为电磁场的矢势与标势，则

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\psi, \tag{6.14}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{6.15}$$

也为相应的矢势与标势，其中 $\psi$ 为一个任意给定的函数. 也就是说，矢势与标势不是唯一确定的，有由上式所示的一定的自由度. 由 (6.14) 和 (6.15) 式给出的变换称为 *规范变换*. $\psi$ 决定了所给的规范. 选取不同的 $\psi$, 就决定了不同的规范；适当选取特殊的 $\psi$, 可使问题得到简化. 当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\phi$ 作规范变换时，尽管矢势和标势改变了，但此时 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 都保持不变. 这种不变性称为 *规范不变性*. 由于这种不变性，在用标势 $\phi$ 及矢势 $\boldsymbol{A}$ 来描述电磁场时，就可以选择适当的规范使处理得到简化. 势有规范不定性，而场在规范变化下不变. 实际上，电磁场是最简单的规范场，现代物理学研究的规范场是它的一个非平凡的推广.

现在看用标势 $\phi$ 及矢势 $\boldsymbol{A}$ 来表示的电磁场方程. 将 (6.13) 式代入麦克斯韦方程 (3.9), 易知可得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{6.16}$$

将 (6.12) 和 (6.13) 代入 (3.12) 式，有

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\phi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \boldsymbol{j}.$$

利用向量分析公式 (5.24), 上式可写为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{6.17}$$

至于麦克斯韦方程组中的另两个方程 (3.10) 和 (3.11), 本是用来定义 $\boldsymbol{A}$ 和 $\phi$ 的，已自动满足. 这样即得到 $\phi$ 及 $\boldsymbol{A}$ 应满足的方程 (6.16) 和 (6.17). 它们仍是 $\phi$ 及 $\boldsymbol{A}$ 的一个联立方程组.

如果选择 $\phi$ 及 $\boldsymbol{A}$ 使其满足

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{6.18}$$

那么 (6.16)—(6.17) 就简化为如下两个互相独立的方程:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{6.19}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}, \tag{6.20}$$

即 $\phi$ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别满足以 $\rho$ 及 $\boldsymbol{j}$ 为源的波动方程.

(6.18) 式称为 *洛伦兹条件*. 在一般情况下, 总可以通过适当的规范变换使洛伦兹条件得到满足, 即可找到 $\psi$, 使在规范变换 (6.14)—(6.15) 下成立

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0. \tag{6.21}$$

事实上, 将 (6.14) 及 (6.15) 代入上式, 得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{6.22}$$

上式为以 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ 为右端的波动方程. 只要取 $\psi$ 为这个方程的解, 所得的 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\phi'$ 即满足 (6.21) 式. 这样的 $\psi$ 总是存在的.

满足洛伦兹条件的 $\boldsymbol{A}$ 及 $\phi$ 称为 *洛伦兹规范* 下的 $\boldsymbol{A}$ 及 $\phi$.

值得注意的是, 洛伦兹条件 (6.18) 并不能完全确定 $\boldsymbol{A}$ 和 $\phi$. 由 (6.22) 式不难看出, 由满足 (6.22) 式的 $\psi$ 加上任意一个满足齐次波动方程的函数, 所得的 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\phi'$ 仍满足洛伦兹条件 (6.21). 因此在洛伦兹规范内也还存在着规范变换和规范不变性问题.

在近代物理学中, 通常更多地采用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\phi$ 而不是用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来描写电磁场, 而且通常采取洛伦兹规范.

特别, 在自由电磁场的情况: $\rho = 0, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, 在洛伦兹规范下, $\phi$ 及 $\boldsymbol{A}$ 均满足齐次波动方程. 不难验证, 此时可适当选择 $\psi$ 使在保持洛伦兹条件的规范变换下, 新的标势 $\phi' = \phi - \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \equiv 0$. 为此只要取 $\psi$ 使其满足 $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \phi$ 和齐次波动方程即可. 此时, 标势与矢势满足的方程只剩下

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{6.23}$$

而洛伦兹条件则化为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 只有横场部分. 相应地,

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6.24}$$

及

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{6.25}$$

均为横场. 这是最简单的形式.

一般地说, 满足条件

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{6.26}$$

的规范, 称为 库仑规范. 在库仑规范下, 电磁场的标势 $\phi$ 与矢势 $\boldsymbol{A}$ 所满足的方程就不深入讨论了.

### 6.3. 例 —— 电偶极辐射

这一段我们以一个简单的例子, 说明如何产生电磁波的问题. 由麦克斯韦方程组我们知道, 变化的电场会激发磁场, 因而会产生电磁波. 下面考虑电偶极矩随时间变化的偶极子所产生的电磁场.

所谓 偶极子, 即相距为 $l$ 、带电量分别为 $-q$ 与 $+q$ 的一对点电荷组成的系统. 我们感兴趣而且有意义的是距离 $l$ 很小的情况. 设由点电荷 $-q$ 到点电荷 $+q$ 的向量为 $\boldsymbol{l}$, 则

$$\boldsymbol{m} = q\boldsymbol{l} \tag{6.27}$$

称为该偶极子的 电偶极矩.

定常状态下的偶极子不会激发电磁波. 现在考察由点电荷在 $\boldsymbol{l}$ 方向作周期性的往复运动所形成的随时间变化的偶极子. 设点电荷 $-q$ 固定在原点 $O$, $\boldsymbol{l}$ 方向与 $z$ 轴的方向一致, 此时可设

$$\boldsymbol{l}(t) = l_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_3, \tag{6.28}$$

其中 $\boldsymbol{e}_3$ 为 $z$ 方向的单位向量. 在 (6.28) 式中取复数形式主要是为了方便, 实用中常取其实部或虚部. 由 (6.28) 式所对应的偶极矩能够激发电磁场. 下面先确定该电磁场的矢势与标势.

在满足洛伦兹条件 (6.18) 时, 矢势 $\boldsymbol{A}$ 满足非齐次波动方程 (6.20). 非齐次波动方程的一个特解由推迟势给出 (例如, 见 [4]), 其一般解应

为该特解与齐次波动方程的解之和. 但深入的讨论可以证明 (见 [1]), 由下面 (6.29) 式右端推迟势给出的特解确是激发的电磁场的满足洛伦兹条件的矢势 $\boldsymbol{A}$. 所以

$$\boldsymbol{A}(t,P)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{r_{P'P}\leqslant ct}\frac{\boldsymbol{j}\left(t-\frac{r_{P'P}}{c},P'\right)}{r_{P'P}}\mathrm{d}V_{P'}. \tag{6.29}$$

由于只有点电荷 $+q$ 的周期往复运动产生电流, 上式右端的电流密度 $\boldsymbol{j}$ 实际上应为一个 $\delta$ - 函数. 当 $r\gg l$ 时, (6.29) 式又可表为

$$\boldsymbol{A}(t,P)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{r_{P'P}\leqslant ct}\boldsymbol{j}\left(t-\frac{r_{P'P}}{c},P'\right)\mathrm{d}V_{P'}, \tag{6.30}$$

其中 $r=|\overline{OP}|$ 为从原点 $O$ 到 $P$ 点的距离 (见图 2).

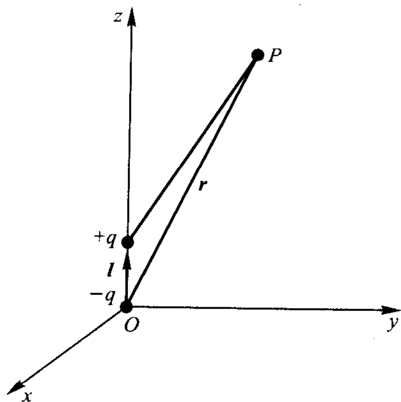



图 2

设点电荷 $+q$ 运动的速度为 $\boldsymbol{v}$, 则

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}=\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega l_0\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $\rho$ 为在电荷 $+q$ 处的电荷密度, 它是一个 $\delta$ - 函数. 将其代入 (6.30) 式, 得

$$\boldsymbol{A}(t,P)=-\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega l_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\frac{\omega r}{c}}\int_{r_{P'P}\leqslant ct}\rho\mathrm{d}V_{P'}\boldsymbol{e}_3,$$

从而当 $t$ 适当大时 (满足 $r < ct$), 就有

$$\boldsymbol{A}(t,P) = -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\boldsymbol{m}(t), \tag{6.31}$$

其中 $\boldsymbol{m}(t) = q\boldsymbol{l}(t)$, 而 $k = \omega/c$ 为波数. 这就是该电磁场的矢势.

为得到电磁场的标势 $\phi$, 将由 (6.31) 式给出的矢势代入洛伦兹条件 (6.18), 我们有

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}m(t)\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0.$$

注意到 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega m(t)$ 及 $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$, 上式又可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right)m(t) + \phi\right) = 0.$$

于是

$$\phi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right)m(t) + \phi_0(x,y,z),$$

其中 $\phi_0(x,y,z)$ 为一待定函数. 考虑到 $\phi$ 应该具有如下形式: $\phi = \widetilde{\phi}(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 在上式中应取 $\phi_0(x,y,z) \equiv 0$. 故有

$$\phi(t,x,y,z) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right)m(t). \tag{6.32}$$

这就是该电磁场的标势.

容易直接验证, 对任意可微函数 $f(r)$, 成立

$$\mathrm{rot}(f(r)\boldsymbol{m}) = \mathrm{grad}\, f(r) \times \boldsymbol{m} = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{m}.$$

利用上述关系, 由矢势的定义 (6.12) 与 (6.31) 式, 即有

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 ck^2}{4\pi r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}kr}\right)\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}, \tag{6.33}$$

其中 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. 再注意到

$$zm(t) = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}, \qquad m(t)\mathrm{grad}\, z = \boldsymbol{m}$$

及

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}-(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

由标势的定义 (6.13) 及 (6.31)—(6.32) 式，可直接计算得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{n}\\ &\quad+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{\mathrm{i}k}{r^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}(3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}).\end{aligned}\tag{6.34}$$

在偶极振子的邻近区域，即 $r\ll\lambda$ (波长)$=\dfrac{2\pi c}{\omega}=\dfrac{2\pi}{k}$ 时，由 (6.33) 与 (6.34) 式，磁感强度与电场强度可近似地取为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 ck}{4\pi r^2}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}),\tag{6.35}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}).\tag{6.36}$$

此时，电场除随时间变化外，恰好就是相应的静态电偶极子所产生的电场 (见习题 5). 在这种区域中， $kr\ll 1$, 由 (6.35) 及 (6.36) 式可见，磁感强度比电场强度小得多 (相差一个因子 $kr$ 的数量级). 于是在邻近的区域内，场性质以电场为主. 这个区域称为 静场区. 对研究电偶极振子向外辐射电磁波来说，这个区域的情况不是很重要的.

在离偶极振子很远的区域中，即 $r\gg\lambda$ 时，由 (6.33) 与 (6.34) 式可见，磁感强度与电场强度可近似地取为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 ck^2}{4\pi r}e^{\mathrm{i}kr}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m},\tag{6.37}$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n}.\tag{6.38}$$

由以上两式，并注意到 $\boldsymbol{m}$ 及 $\boldsymbol{n}$ 的定义，可见在这一区域中， $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 三向量彼此正交，而且 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿着子午线的方向， $\boldsymbol{B}$ 沿着纬线的方向 (见图 3), 其值为

$$E=cB=\frac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi r}\sin\theta\left|\cos(\omega(t-\frac{r}{c}))\right|,\tag{6.39}$$

其中 $m_0=ql_0$, $\theta$ 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $z$ 轴的夹角，并取了 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\frac{r}{c})}$ 的实部. 这表明在这种区域中，场强 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 有相同的相位 $\omega(t-\dfrac{r}{c})$, 且沿矢径

$\boldsymbol{r}$ 方向以光速 $c$ 传播. 因此, 从整体上看, 电磁波是以电偶极振子为心的球面波, 然而波面上相位相同的各点并不都有相等的场强. 实际上, 场强与极角 $\theta$ 有关. 在赤道上, 场强最大. 满足条件 $r \geqslant \lambda$ 的区域称为 波动场区 或 辐射区.

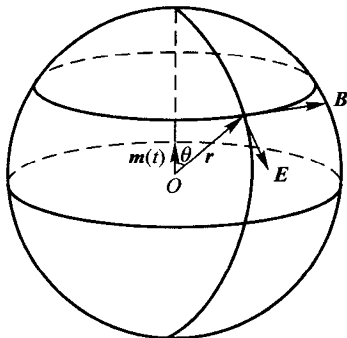



图 3

现考察电偶极子辐射的能量. 由 §4 中电磁场能量密度的表达式, 对由 (6.39) 式给出的 $E$ 及 $B$, 有

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) = \frac{\mu_0 k^2 \omega^2 m_0^2}{16\pi r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right).$$

由能量流密度向量 $\boldsymbol{S}$ 的表达式 (4.19) 知, $\boldsymbol{S}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 相同, 而其大小为

$$S = \frac{c\mu_0 k^2 \omega^2 m_0^2}{16\pi^2 r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right). \qquad (6.40)$$

这样, 单位时间内通过以振子为球心、 $r$ 为半径的球面的总能量为

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^\pi S\cdot 2\pi r^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{6\pi}c\mu_0 k^2\omega^2 m_0^2\cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right). \end{aligned} \qquad (6.41)$$

因此, 单位时间内辐射的平均能量为

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{12\pi}c\mu_0 k^2\omega^2 m_0^2 = \frac{1}{12\pi c}\mu_0\omega^4 m_0^2, \tag{6.42}$$

其中 $T$ 为周期: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. 由此可见，振子不断地把能量辐射到周围空间中，单位时间内平均辐射的能量与偶极矩的振幅 $m_0$ 的平方成正比，而与圆频率 $\omega$ 的四次方成正比，即与波长的四次方成反比. 这就是在无线电通讯与广播中，必须用频率较高、波长较短的电磁波的缘故.

## §7. 媒质中的麦克斯韦方程组

### 7.1. 媒质中的麦克斯韦方程组

前面讨论了真空中的电磁场，得到了它的一般规律. 但在电磁问题中，经常遇到有媒质存在的情况，这时相应的麦克斯韦方程组及洛伦兹力公式在形式上都要适当的加以变动.

媒质可以是不导电的，也可以是导电的. 媒质在电磁场中会出现下述一些情况.

1) *媒质的极化*. 所有媒质都是由原子构成的，而原子具有带正电的核和带负电的电子. 在通常情况下，由于正、负电相等，故表现为中性. 若媒质是绝缘的，则全部正、负电荷都束缚在原来的位置上；在媒质是导电的情况，亦将有一部分电荷束缚在原来的位置上，这部分电荷称为*束缚电荷*. 当媒质中有电磁场时，束缚电荷在电场力作用下会有一微小的运动，产生一个相对小的位移，位移的大小与方向决定于该处电场强度的大小与方向，也和束缚电荷的电性有关. 这样，正、负电荷之间的位移产生了一个电偶极矩. 这种现象称为媒质的*极化*，它会产生一个附加的电场.

设在媒质中产生的电极化强度为 $\boldsymbol{P}$ (即单位体积的电偶极矩)，束缚电荷体密度为 $\rho'$. 由高斯定理，有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho'), \tag{7.1}$$

其中 $\rho_f$ 是自由电荷体密度. 可以证明

$$\rho' = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}. \tag{7.2}$$

将其代入 (7.1) 式就得到

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_f, \tag{7.3}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{7.4}$$

称为电通密度或电位移向量. 在场强不是很大时, 实验表明 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间存在线性关系. 特别, 当媒质是各向同性时,

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E}, \tag{7.5}$$

其中 $\chi_e$ 称为电极化率. 此时由 (7.4) 和 (7.5), 得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{7.6}$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 称为介电常数, 而 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ 称为相对介电常数. 对非均匀媒质, $\varepsilon$ 可以是 $(x, y, z)$ 的函数.

2) 媒质的磁化. 在媒质中有电磁场时, 还会发生磁化现象. 因为原子中的电子不断地绕原子核运动, 此外电子还有自旋, 这些都形成电流, 称为分子电流 (局限在分子内部的电流). 它们相当于一个个小磁针. 当媒质 (铁磁性媒质除外) 中没有外磁场时, 宏观上看, 这些分子电流及其所产生的磁场互相抵消, 因而在媒质中并不显示有宏观的电流及相应的宏观磁场. 但当媒质置于外磁场中时, 在磁场力的作用下, 这些小磁针会出现一定程度上的规则排列, 从而产生一个附加的宏观磁场. 这种现象称媒质的磁化.

设媒质中磁化电流密度为 $\boldsymbol{j}'$, 那么由稳定电流产生的磁场中的安培定理, 应有

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{j}_f + \boldsymbol{j}'), \tag{7.7}$$

其中 $\boldsymbol{j}_f$ 是传导电流密度. 可以证明

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{j}', \tag{7.8}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为媒质中产生的磁化强度 (即单位体积的磁偶极矩). 将上式代入 (7.7), 得到

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f, \tag{7.9}$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M} \tag{7.10}$$

称为磁场强度. 实验证明，在场强不是很大时，对各向同性的媒质，

$$\boldsymbol{M}=\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}, \tag{7.11}$$

其中 $\chi_{\mathrm{m}}$ 称媒质的磁化率. 这样，由 (7.10) 式得到

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{7.12}$$

其中 $\mu=\mu_r\mu_0$ 称为磁导率, 而 $\mu_r=1+\chi_{\mathrm{m}}$ 称为相对磁导率. 对非均匀媒质， $\mu$ 可以是 $(x,y,z)$ 的函数.

类似于真空中的电磁场，对非稳定的情况， (7.9) 式应修改为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}_f. \tag{7.13}$$

容易直接验证， (7.13) 式与电荷守恒律方程

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}_f=0 \tag{7.14}$$

相容.

3) 当媒质是导电的情况，还可能出现传导电流. 它是自由电荷 (电子或离子) 在电磁场作用下发生运动的结果.

总之，媒质中的电荷在电磁场的作用下，可以出现极化、磁化和传导三种运动形态. 这会改变原来的电磁场，并使得有关的方程改变其形式. 由上面的讨论知，在各向同性的媒质中的麦克斯韦方程组应具有下述形式：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho_f, \tag{7.15}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{7.16}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0, \tag{7.17}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}_f, \tag{7.18}$$

其中 $\rho_f$ 及 $\boldsymbol{j}_f$ 应满足电荷守恒律方程 (7.14).

这一方程组的特点是只出现自由电荷密度及传导电流密度，而不出现相应于媒质极化及磁化的电荷及电流． $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的引入是为了将极化及磁化的效果包括在内，而使方程中只剩下自由电荷及传导电流．这样做有很大的方便．因为极化和磁化的情况可由该处的电场及磁场直接决定，从而束缚电荷及 (由极化及磁化所产生的) 诱导电流也如此，而自由电荷及传导电流可能是外来的．此外，传导电流可以用一般的电流计加以测量，而诱导电流则不能．将它们分别开来加以不同的处理是比较方便的．最后一个方程 (7.18) 右端的第一项

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{d}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{7.19}$$

称为 位移电流，它并不是真正的电流．

相应于 (7.15)—(7.18) 及 (7.14) 诸式的积分形式为

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_{\Omega}\rho_f \mathrm{d}V, \tag{7.20}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{7.21}$$

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0, \tag{7.22}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_S \boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{7.23}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho_f \mathrm{d}V = -\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{7.24}$$

其中 $\Omega$ 为电磁场中的任一给定区域， $\partial\Omega$ 为其边界； $l$ 为电磁场中的任一给定封闭曲线， $S$ 为任一以 $l$ 为边缘的曲面，其单位外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的取向与 $l$ 的回转方向构成右手系．

### 7.2. 媒质交界面上的条件

在实际问题中常碰到不同媒质之间的交界面 (包括媒质的表面，也可视为媒质与真空的界面)．在这种交界面上，由于媒质的性质有一突变，故电磁场也会有突变，电磁场的一些量在媒质交界面上会出现不连续．因此，麦克斯韦方程组的微分形式在交界面上将失去意义，但其积分形式在交界面附近仍然是适用的．现在我们要利用这些积分形式，导出交界面两侧电磁场量应满足的关系式，即在媒质交界面上应

满足的 交界面条件. 这是一种内边界条件, 是麦克斯韦方程组在交界面上的表现形式. 在交界面两侧, 电磁场量是正规的, 原先微分形式的麦克斯韦方程组仍然发挥作用. 将媒质内部的麦克斯韦方程组和媒质交界面上的交界面条件相结合, 就可以得到完整的描述.

首先看方程 (7.20). 在交界面 $\Gamma$ 两侧各作一和其平行的曲面 $S_-$ 和 $S_+$, 并由此构成一柱形体 $\Omega$ (见图 4). 在 $\Omega$ 上用 (7.20) 式, 即有

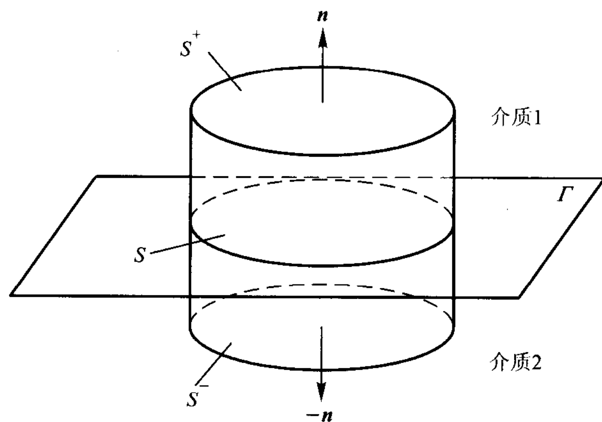



图 4

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = Q_f, \tag{7.25}$$

其中 $Q_f$ 为此柱体内所含的电荷总量. 先令此柱体的高度趋于零, 此时曲面 $S^+$ 与 $S^-$ 分别从两侧趋向交界面上的曲面块 $S$, 而 $\boldsymbol{D}$ 的极限值在两侧各不相同, 分别设为 $\boldsymbol{D}_1$ 及 $\boldsymbol{D}_2$. 规定单位法线向量 $\boldsymbol{n}$ 对两侧有同一取向, 为确定起见, 不妨设 $\boldsymbol{n}$ 指向媒质 1 的内部, 则 (7.25) 式左端的极限为

$$\int_S (\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

而此时右端的总电荷只能考察面电荷的贡献. 设在 $\Gamma$ 上自由电荷的面密度为 $\omega_f$, 则 (7.25) 式右端的极限为

$$\int_S \omega_f \mathrm{d}S.$$

由此得到

$$\int_S (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_S \omega_f \mathrm{d}S. \tag{7.26}$$

再令曲面块 $S$ 趋于一点，或注意到上式对交界面 $\Gamma$ 上的任一曲面块 $S$ 均成立，即得

$$(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n} = \omega_f. \tag{7.27}$$

这就是方程 (7.20) 在交界面上的表现形式. 记 $\boldsymbol{D}$ 在交界面上的跃度为

$$[\boldsymbol{D}] = \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2,$$

则 (7.27) 式可写为

$$[\boldsymbol{D}] \cdot \boldsymbol{n} = \omega_f. \tag{7.28}$$

这说明 *在交界面上没有自由面电荷时* ($\omega_f = 0$), *电通密度 $\boldsymbol{D}$ 在交界面上的法向分量是连续的；否则将跃变 $\omega_f$.*

类似地，由方程 (7.22) 可得其在交界面上的表现形式为

$$[\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{7.29}$$

其中 $[\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2$. 这说明 *在交界面上磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量是连续的.*

现在考察方程 (7.21). 在交界面的两侧作一环形回路，其两边 $l^+$ 及 $l^-$ 与交界面平行，而两侧边与其垂直 (见图 5). 将 (7.21) 用于此回路及以其为边缘的曲面，有

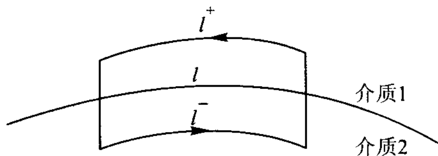



图 5

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S. \tag{7.30}$$

先令此回路的侧边 (高) 趋于零，于是，$l^+$ 及 $l^-$ 趋向于交界面上的曲线段 $l$, 从而 (7.30) 式左端的极限为

$$\int_l (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的取向与 $l^+$ 同，$\boldsymbol{E}_1$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 分别为 $\boldsymbol{E}$ 在界面两侧的极限值. 此时，(7.30) 式右端的极限为零. 故得

$$\int_l (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0. \tag{7.31}$$

再令此曲线段趋于一点，或注意到此段曲线的任意性，由上式就得到在交界面上成立

$$[\boldsymbol{E}] \cdot \boldsymbol{m} = 0, \tag{7.32}$$

其中 $\boldsymbol{m}$ 为与交界面相切的任一方向，$[\boldsymbol{E}] = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$. 这说明 *电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量在交界面上是连续的*. (7.32) 式又可写为

$$[\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}. \tag{7.33}$$

这是方程 (7.21) 在界面上的表现形式.

类似地，由 (7.23) 式可得其在交界面上的表现形式为

$$[\boldsymbol{H}] \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{7.34}$$

即 *磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在交界面上连续*. 这儿假设只具有体传导电流密度，而没有面传导电流密度.

这样，在交界面上的内边界条件为

$$[\boldsymbol{D}] \cdot \boldsymbol{n} = \omega_f, \tag{7.35}$$

$$[\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{7.36}$$

$$[\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{7.37}$$

$$[\boldsymbol{H}] \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{7.38}$$

其中单位法线向量 $\boldsymbol{n}$ 在交界面两侧有同一取向. 因此，*在媒质的交界面上，$\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续，而 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量有跃度 $\omega_f$.*

同理，由 (7.24) 得电荷守恒定律在交界面上的表现形式为

$$[\boldsymbol{j}_f] \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{\partial \omega_f}{\partial t}, \tag{7.39}$$

其中 $[\boldsymbol{j}_f]$ 为 $\boldsymbol{j}_f$ 在交界面上的跃度， $\omega_f$ 为交界面上的自由电荷面密度，而 $\boldsymbol{n}$ 在交界面两侧有同一取向.

### 7.3. 媒质中电磁场量的表示

现在推导媒质中电磁场能量的表示式. 由麦克斯韦方程 (7.16) 与 (7.18), 有

$$\boldsymbol{0} = \mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{7.40}$$

$$-\boldsymbol{j}_f = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\boldsymbol{H}. \tag{7.41}$$

将 (7.40) 式与 $\boldsymbol{H}$ 作数量积， (7.41) 式与 $\boldsymbol{E}$ 作数量积，并相加所得的结果. 注意到 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, 且 $\varepsilon$ 及 $\mu$ 只是 $(x, y, z)$ 的函数，而与 $t$ 无关，我们得到

$$-\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} - \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{7.42}$$

注意到向量分析公式

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H}, \tag{7.43}$$

(7.42) 式可写为

$$-\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}). \tag{7.44}$$

这样，可以类似地定义 电磁能量密度 为

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}), \tag{7.45}$$

而 电磁能量流密度向量 为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \tag{7.46}$$

它仍称为 坡印亭向量. (7.44) 式即媒质中能量守恒与转化定律的微分形式.

至于在媒质中电磁场的 电磁动量密度向量 及 电磁动量流密度张量 则分别为

$$\frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \tag{7.47}$$

及

$$\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\mu H^2)\boldsymbol{I}-\varepsilon\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}, \tag{7.48}$$

其推导过程从略.

## §8. 静电场和静磁场

### 8.1. 静电场

由静止电荷产生的稳定电场分布称为 静电场. 此时, 没有电荷的流动, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 也不随时间变化: $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y,z)$, 从而磁场为零: $\boldsymbol{B}=0$.

由麦克斯韦方程 (7.15) 及 (7.16), 有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho_f, \tag{8.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \tag{8.2}$$

由 (8.2) 式, 存在静电势 $\phi$ (其决定可相差一个任意常数), 使

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\phi. \tag{8.3}$$

这样, 方程 (8.1) 化为

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\rho_f. \tag{8.4}$$

即在媒质内部, $\phi$ 满足一个二阶椭圆型方程. (8.4) 是一个非齐次的拟调和方程.

现在讨论 $\phi$ 在媒质交界面上应满足的条件. 由 (7.35) 与 (7.37) 式知, 在媒质的交界面上有

$$[\boldsymbol{D}]\cdot\boldsymbol{n} = \omega_f, \tag{8.5}$$

$$[\boldsymbol{E}]\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}. \tag{8.6}$$

注意到 $\boldsymbol{D} = -\varepsilon \operatorname{grad} \phi$, (8.5) 式可写为

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_2 = -\omega_f, \tag{8.7}$$

其中下标 1 及 2 分别表示在交界面上处于媒质 1 及 2 一侧的相应值. (8.7) 式可写为

$$\left[\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}\right] = -\omega_f. \tag{8.8}$$

由 (8.6) 式，对任何与交界面相切的方向 $\boldsymbol{m}$, 成立

$$(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \cdot \boldsymbol{m} = 0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial m}(\phi_1 - \phi_2) = 0,$$

这表示 $\phi_1 - \phi_2$ 在交界面上为常数. 由于 $\phi$ 的决定可相差一个任意常数，适当调整这一常数之值，可得在交界面上

$$\phi_1 = \phi_2 \quad 或 \quad [\phi] = 0. \tag{8.9}$$

这样，静电势在交界面上应满足的条件为

$$\phi_1 = \phi_2, \tag{8.10}$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_2 = -\omega_f, \tag{8.11}$$

即本身为连续，但一阶法向导数有间断. 而在不存在面电荷的情况，则成立

$$\phi_1 = \phi_2, \tag{8.12}$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_2. \tag{8.13}$$

现在考察在其他边界上的边界条件. 如果我们要决定一带电导体以外空间中的静电场，我们就必须知道在导体表面上的边界条件. 我们知道，在导体上加置自由电荷时，电荷会自动地重新分布，一直到导

体内部处处电场强度为零，从而整个导体上的静电势为一常数时才达到平衡. 这是因为当导体内部电场不为零时，电荷必在电场作用下逐渐流动；而只有在电场为零时，才能达到静电情况. 因此导体上的静电分布满足以下几个条件：

(1) 每个导体上电荷分布的总和等于所加置的电荷总量.

(2) 导体所带的电荷都以面电荷的形式分布在导体表面上，在导体内部不能带电荷 (这一现象称为 趋肤效应). 这是因为在导体内部 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$, 从而由 (8.1) 式可得电荷密度为零.

(3) 每个导体都是等势体，其上静电势为常数.

(4) 自由电荷通过导体边界向外发出的总电通量等于导体上总自由电荷：

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=Q_f, \tag{8.14}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为导体 $\Omega$ 边界的单位外法线方向.

这样，在带电导体表面上的边界条件应为

$$\phi=\text{常数 (待定)}, \tag{8.15}$$

$$\int_{\partial\Omega}\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S=Q_f, \tag{8.16}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 指向导体内部. 这里，边界条件由两个式子组成. 第一个条件 (8.15) 表示 $\phi$ 为一待定常数，是导体表面 $\partial\Omega$ 为等势面的数学表达. 由于此常数待定，这不是一个狄利克雷 (Dirichlet) 型的边界条件，还需要另一个条件来加以补充，以限制其自由度. 第二个条件 (8.16) 是 $\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 在 $\partial\Omega$ 上的积分，表示总电通量为已知. 这是一个非局部的边界条件. (8.15)—(8.16) 是一种新型的边界条件，称为“等值面边界条件”或“总流量边界条件”. 关于这种类型的边界条件，已有一系列的研究 (参阅 [5], [8],[12], [17] 及 [17] 中所列的文献).

此外，若求解的是在无界区域上的静电场，还要考虑无穷远处的边界条件. 通常可设在无穷远处电势为零：

$$\phi=0. \tag{8.17}$$

这是狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件. 在实际求解时，可取一相当大的区域近似代替无界区域，而在其“无穷远边界”上设置上述条件.

还有在静电场对称面上的条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \tag{8.18}$$

这是 诺依曼 (Neumann) 边界条件.

这样, 对静电场的决定, 总可化为求解二阶椭圆型方程的适定的边值问题, 并可以方便地使用有限元素法求得其数值解 (参见 [7]).

静电场中有关的量, 也都可以用静电势 $\phi$ 来描述. 例如能量密度为

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon}{2}E^2 = \frac{\varepsilon}{2}|\mathrm{grad}\,\phi|^2,$$

而电磁能量为

$$U_{e,m} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \varepsilon|\mathrm{grad}\,\phi|^2 \mathrm{d}V. \tag{8.19}$$

(8.19) 就是著名的 狄利克雷积分. 它在变分方法的研究中起着基本的作用.

注意到由 (8.1) 式, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon|\mathrm{grad}\,\phi|^2 &= -\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{grad}\,\phi \\ &= -\mathrm{div}\,(\phi\boldsymbol{D}) + \phi\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} \\ &= -\mathrm{div}\,(\phi\boldsymbol{D}) + \phi\rho_f, \end{aligned}$$

(8.19) 式又可写为

$$U_{e,m} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \phi\rho_f \mathrm{d}V, \tag{8.20}$$

其中 $\Omega$ 为整个静电场所在的区域.

### 8.2. 稳定电流的电场

稳定电流的电场具有静电场的特征. 此时 $\rho_f$ 及 $\boldsymbol{j}_f$ 均只是 $(x,y,z)$ 的函数, 而与 $t$ 无关, 从而 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 等也与 $t$ 无关. 由麦克斯韦方程组 (7.15)—(7.18) 得

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_f, \tag{8.21}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \tag{8.22}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \tag{8.23}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f. \tag{8.24}$$

此外，电荷守恒律方程 (7.14) 给出

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}_f = 0. \tag{8.25}$$

和静电场情形一样，前面两个方程 (8.21) 与 (8.22) 已足以决定电场. 即可引进电势 $\phi$, 使 (8.3) 与 (8.4) 式成立. 在媒质交界面上，也有和前面一样的条件 (8.10) 与 (8.11). 因此可以和静电场一样地进行讨论.

但在实际应用中，特别在电阻率法测井中 (参见 [7]), 对稳定电流的电场，我们常采用以下有所不同的方法来建立其相应的微分方程模型.

仍由 (8.22) 式引入势函数 $\phi$:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \phi. \tag{8.26}$$

再由微分形式的欧姆 (Ohm) 定律，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电流密度 $\boldsymbol{j}_f$ 有下述关系：

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma \boldsymbol{E} = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{E}, \tag{8.27}$$

或

$$\boldsymbol{E} = \gamma \boldsymbol{j}_f, \tag{8.28}$$

其中 $\sigma$ 及 $\gamma = \dfrac{1}{\sigma}$ 分别称为电导率及电阻率. 这是因为场强的方向决定了媒质中电流流动的方向，而电流流动的速度与 $\boldsymbol{E}$ 成正比，与电阻率成反比.

这样，由 (8.26) 与 (8.28) 式有

$$\boldsymbol{j}_f = -\frac{1}{\gamma} \operatorname{grad} \phi. \tag{8.29}$$

将其代入电流连续性方程 (8.25), 就得到 $\phi$ 满足如下的二阶椭圆型方程

$$-\operatorname{div} \left( \frac{1}{\gamma} \operatorname{grad} \phi \right) = 0, \tag{8.30}$$

即

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0. \tag{8.31}$$

这是一个拟调和方程.

在媒质交界面上，我们可从 (8.22) 及 (8.25) 的积分形式与 §7.2 中一样地得到相应的交界面条件

$$[\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{8.32}$$

$$[\boldsymbol{j}_f] \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{8.33}$$

因此，由 (8.26) 及 (8.29) 式可得

$$\phi_1 = \phi_2, \tag{8.34}$$

$$\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_1 = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_2. \tag{8.35}$$

这里 (8.34) 式也是在调整一附加常数后得到的. 上两式表示： *在媒质的交界面上，势与电流的法向分量均是连续的.*

这时，我们可以碰到的边界条件有

1) 狄利克雷边界条件

$$\phi = \text{已知函数}. \tag{8.36}$$

例如对接地的边界可设 $\phi = 0$; 对“无穷远边界”上的电势也可取为零.

2) 诺依曼边界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \text{已知函数}. \tag{8.37}$$

例如在对称面上有 $\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0$; 在绝缘材料构成的边界上，由于无电流流入此边界，有 $\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{n} = -\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, 故仍有上述边界条件.

3) 等值面边界条件：在电极面 $\mathit{\Gamma}_0$ 上，由于电极面是导体，其上 $\phi$ 应为 (待定) 常数. 此外，通过电极面向媒质中发射稳恒电流 $I_0$, 这是造成稳定电流的原因，在石油电法测井中就是这样. 记 $\boldsymbol{n}$ 为在 $\mathit{\Gamma}_0$ 上区域的单位外法线方向，由于向媒质中发射的总电流为 $I_0$, 有

$$-\int_{\mathit{\Gamma}_0} \boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = I_0. \tag{8.38}$$

从而由 (8.29), 有

$$\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S = I_0. \tag{8.39}$$

这样, 在电极面 $\Gamma_0$ 上又一次得到如下的等值面边界条件或总流量边界条件:

$$\phi|_{\Gamma_0} = \text{待定常数}, \tag{8.40}$$

$$\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S = I_0(\text{已知常数}). \tag{8.41}$$

而整个问题就化为求解相应的等值面边值问题或总流量边值问题 (见 [7], [17]).

**8.3. 静磁场**

如前所述, 稳定电流所形成的磁场称为静磁场. 此时 $\rho_f$ 及 $\boldsymbol{j}_f$ 均只为 $(x, y, z)$ 的函数, 而与 $t$ 无关. 麦克斯韦方程组以及电荷守恒律方程具有形式 (8.21)—(8.25).

由稳定电流形成的电场已在上节中处理. 而相应的磁场同样可以单独处理, 它们满足

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0, \tag{8.42}$$

$$\mathrm{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f \tag{8.43}$$

及

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{j}_f = 0. \tag{8.44}$$

下面介绍处理静磁场的两种可能的方法.

首先讨论矢势法. 由 (8.42) 式知, 可引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 使

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot} \boldsymbol{A}. \tag{8.45}$$

且由于 $\boldsymbol{A}$ 可以相差一个任意函数 $\psi$ 的梯度 (即任一纵场), 可以设 $\boldsymbol{A}$ 为横场, 即满足

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = 0 \tag{8.46}$$

(参见 §6.1). 上面引入的 $\boldsymbol{A}$ 称为静磁场的向量势 (矢势).

将 $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\boldsymbol{A}$ 代入 (8.43) 式，得

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{j}_f. \tag{8.47}$$

这是矢势 $\boldsymbol{A}$ 应满足的方程. 利用向量分析公式，上式可写为

$$\text{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right) \times \text{rot}\boldsymbol{A} + \frac{1}{\mu}\text{rot rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}_f. \tag{8.48}$$

再利用向量分析公式 (2.35), 并注意 (8.46) 式，上式可改写为

$$-\frac{1}{\mu}\Delta\boldsymbol{A} + \text{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right) \times \text{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}_f. \tag{8.49}$$

这就是矢势 $\boldsymbol{A}$ 满足的一个主部分离的二阶椭圆型方程组.

考察 $\mu$ 为常数的特殊情况 (这是在应用中经常碰到的情形), 此时有

$$-\Delta\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{j}_f. \tag{8.50}$$

即在矢势 $\boldsymbol{A}$ 取为横场时，它满足泊松方程. 利用体位势，这个方程的一个解可取为

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{j}_f(P')\mathrm{d}V'}{r_{P'P}}. \tag{8.51}$$

而且由 (8.44) 式不难证明, 由上式给出的 $\boldsymbol{A}$ 的确满足横场条件 (8.46).

下面看一个磁场能量 (不计电场) 的表达式. 由 (7.45) 式知

$$U_{e,m} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V. \tag{8.52}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} &= \text{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}\\ &= \text{div}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A}\cdot\text{rot}\boldsymbol{H}\\ &= \text{div}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_f,\end{aligned}$$

而且 $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})$ 在整个区域 $\Omega$ 上的积分在利用格林公式化为边界积分后应为零，故得

$$U_{e,m}=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V. \tag{8.53}$$

这样，可见静电场 $\boldsymbol{E}$ 及静磁场 $\boldsymbol{B}$ 之间有许多相似的地方，见下面表格.

| | |
|---|---|
| 静电场 | 无旋场 (纵场) |
| | 有标势 $\phi$, 使 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\phi$<br>($\phi$ 可相差一任意常数),<br>$\phi$ 满足<br>$-\varepsilon\Delta\phi-\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}\phi=\rho_f$;<br>$-\Delta\phi=\frac{1}{\varepsilon}\rho_f$ (若 $\varepsilon$ 为常数) |
| | 能量 $U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho_f\phi\mathrm{d}V$ |
| 静磁场 | 无源场 (横场) |
| | 有矢势 $\boldsymbol{A}$, 使 $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$<br>($\boldsymbol{A}$ 可相差一任意标量场的梯度),<br>$\boldsymbol{A}$ (在 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$ 时) 满足<br>$-\frac{1}{\mu}\Delta\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right)\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{j}_f$;<br>$-\Delta\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{j}_f$ (若 $\mu$ 为常数) |
| | 能量 $U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$ |

现在介绍静磁场的 标势法. 用矢势 $\boldsymbol{A}$ 来处理静磁场要出现三个函数 $A_x$, $A_y$ 及 $A_z$, 而且在 $\mu$ 不为常数时，方程组呈现复杂的面貌，不易于处理. 现在说明，和一般情形下的电磁场不同，对静磁场还可以用标势来处理.

由 (8.44) 式，利用引理 6.1, 我们知道，存在向量 $\boldsymbol{F}$ 使

$$\boldsymbol{j}_f=\operatorname{rot}\boldsymbol{F}. \tag{8.54}$$

而且由引理 6.1 后的注 6.1 知，总可以选取 $\boldsymbol{F}$ 使

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0. \tag{8.55}$$

将 (8.54) 式代入方程 (8.43), 得

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F})=\mathbf{0}.$$

于是由引理 6.2, 必存在一个标量函数 $\phi$ 使

$$\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad}\phi. \tag{8.56}$$

我们称上式右端的 $\phi$ 为静磁场的标量势 (标势). 这样就有

$$\boldsymbol{B}=-\mu\operatorname{grad}\phi+\mu\boldsymbol{F}, \tag{8.57}$$

将其代入 (8.42) 式，得标势 $\phi$ 满足的方程

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\&=-\operatorname{div}(\mu\boldsymbol{F}).\end{aligned} \tag{8.58}$$

但

$$\operatorname{div}(\mu\boldsymbol{F})=\mu\operatorname{div}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu=\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu,$$

这里我们利用了 (8.55) 式. 将上式代入 (8.58) 式右端，得标势 $\phi$ 满足的非齐次拟调和方程

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=-\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu. \tag{8.59}$$

特别在 $\mu$ 为常数的情形，上式变为调和方程

$$-\Delta\phi=0. \tag{8.60}$$

下面讨论在媒质交界面上的条件. 因磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在媒质的交界面上连续 (见 (7.38) 式), 由 (8.56) 式得

$$[-\operatorname{grad}\phi+\boldsymbol{F}]\cdot\boldsymbol{m}=0,\quad\forall\text{ 切向量}\boldsymbol{m}. \tag{8.61}$$

注意到在引理 6.1 中，若 $\boldsymbol{B}$ 及其一阶偏导数在曲面 $S$ 上有第一类间断，但 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在 $S$ 上连续，那么可以证明，引理中给出的 $\boldsymbol{A}$ 在包含 $S$ 在内的区域中是连续的 (对 $S$ 为平面 $z=0$ 的情形，见习题

15). 再由 (8.33) 知，$\boldsymbol{j}_f$ 的法向分量在媒质的交界面上是连续的. 因此，(8.54) 式右端的 $\boldsymbol{F}$ 在媒质的交界面上为连续的，从而 (8.61) 式给出

$$\frac{\partial}{\partial m}[\phi]=0, \quad \forall \text{ 切向量} \boldsymbol{m}. \tag{8.62}$$

注意到 $\phi$ 的决定可以相差一个任意常数，由上式可得

$$[\phi]=0, \quad \text{即} \quad \phi_1=\phi_2. \tag{8.63}$$

另外，磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在媒质交界面上连续 (见 (7.36) 式), 由 (8.57) 式得

$$[-\mu \operatorname{grad}\phi+\mu\boldsymbol{F}]\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

注意到 $\boldsymbol{F}$ 的连续性，由上式得到

$$\left[\mu\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]=[\mu]\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}, \tag{8.64}$$

即

$$\mu_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2=(\mu_1-\mu_2)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{8.65}$$

因为 $\boldsymbol{F}$ 可由电流密度 $\boldsymbol{j}_f$ 确定，因而上式右端为已知函数. 于是，媒质交界面上的条件为

$$\phi_1=\phi_2, \tag{8.66}$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2=(\mu_1-\mu_2)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{8.67}$$

这个条件同样是易于用变分方法处理的.

下面讨论磁场能量的表达式. 由 (8.56) 与 (8.57) 式，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} &= \mu(-\operatorname{grad}\phi+\boldsymbol{F})\cdot(-\operatorname{grad}\phi+\boldsymbol{F})\\ &= \mu|\operatorname{grad}\phi|^2-2\mu\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\phi+\mu|\boldsymbol{F}|^2.\end{aligned} \tag{8.68}$$

但

$$\begin{aligned}\mu\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\phi &= \operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F})-\phi\operatorname{div}(\mu\boldsymbol{F})\\ &= \operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F})-\phi(\mu\operatorname{div}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu)\\ &= \operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F})-\phi\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu,\end{aligned} \tag{8.69}$$

在得到上式的过程中，我们利用了 (8.55) 式. 将 (8.69) 式代入 (8.68) 式，并在整个磁场 $\Omega$ 中积分，注意到散度项 $\operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F})$ 在 $\Omega$ 上的积分在利用格林公式化为边界积分后应为零，就得到

$$\begin{aligned} U_{e,m} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\mu|\operatorname{grad}\phi|^2 + 2\phi\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu + \mu|\boldsymbol{F}|^2)\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{8.70}$$

因为 $\mu$ 及 $\boldsymbol{F}$ 为已知，上积分本质上为

$$U_{e,m} = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mu|\operatorname{grad}\phi|^2 + 2\phi\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu)\mathrm{d}V. \tag{8.71}$$

这是相应于所考察的非齐次二阶椭圆型方程 (8.59) 的狄利克雷积分.

## §9. 达尔文 (Darwin) 模型

### 9.1. 拟静电模型及其修正形式

上一节，我们讨论了静电场与静磁场的问题. 相对来说，这类问题比较简单. 而一般的麦克斯韦方程组的定解问题，无论在理论上还是在数值计算上都要复杂得多. 但在实际问题中常会碰到这种情况：电磁场的变化频率比较低 (例如由通常的交流电所激发的电磁场)，而所考察的空间区域的几何尺寸又不是很大，这时可对麦克斯韦方程组进行简化. 假设电磁场的圆频率为 $\omega$, 那么因为 $\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 是磁感强度关于时间 $t$ 的导数，所以 $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\sim\dfrac{\omega}{c}$. $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ 中包含的是关于空间变量的偏导数，所以 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\sim\dfrac{1}{l}$, 这里 $l$ 是所讨论区域的特征长度. 如果 $\dfrac{\omega}{c}\ll\dfrac{1}{l}$, 即 $\omega\ll\dfrac{c}{l}$, 那么在麦克斯韦方程 (7.16) 中就可以忽略 $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$, 使该方程变为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$. 这便是静电场中电场强度所满足的方程. 这种情况称*拟静电状态*, 而相应于这种状态的麦克斯韦方程组则称为*拟静电模型*或*似稳场方程*. 由麦克斯韦方程组 (7.15)—(7.18), 并注意到 (7.6) 及 (7.12), 拟静电模型应具有如下的形式：

$$\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{j}, \tag{9.1}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \tag{9.2}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{9.3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0. \tag{9.4}$$

这里我们假定介电常数 $\varepsilon$ 与磁导率 $\mu$ 均为常数，并为方便起见，将 $\boldsymbol{j}_f$ 与 $\rho_f$ 简记为 $\boldsymbol{j}$ 与 $\rho$.

由引理 6.3 知，任一向量场都可分解为横场与纵场的叠加. 这样就有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_T+\boldsymbol{E}_L, \tag{9.5}$$

其中 $\boldsymbol{E}_T$ 与 $\boldsymbol{E}_L$ 分别为 $\boldsymbol{E}$ 的横场部分与纵场部分，即它们满足

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}_T=0, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{E}_L=\boldsymbol{0}.$$

因而在拟静电模型中，实际上是略去了电场强度 $\boldsymbol{E}$ 中由于磁场的变化而产生的横场部分 $\boldsymbol{E}_T$. 作为该模型的一个自然的修正，可不在整个的麦克斯韦方程组中，而仅在其中的方程 (7.18) 中略去 $\boldsymbol{E}$ 的横场部分关于时间 $t$ 的偏导数 $\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial t}$. 此时得到的模型称为达尔文模型 (见 [15], [16] 及 [18]). 描述达尔文模型的方程组将在本节第三段中给出.

### 9.2. 麦克斯韦方程组的一个定解问题

设 $\Omega$ 为一有界空间区域，其外部为理想导体，即 $\sigma=+\infty$. 在 $\Omega$ 中电磁场满足的麦克斯韦方程组为

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{j}, \tag{9.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \tag{9.7}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{9.8}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0, \tag{9.9}$$

其中 $\boldsymbol{j}$ 与 $\rho$ 还应满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0. \tag{9.10}$$

现在讨论在边界 $\partial\Omega$ 上， $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 应满足的边界条件. 对理想导体，由欧姆定律 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$. 这样， $\partial\Omega$ 作为不同媒质的交界

面，在其外侧有 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathbf{0}$, 再利用在媒质交界面上电磁场应满足的条件 (7.37) 与 (7.36), 即得

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}=\mathbf{0},\qquad 在\partial\Omega 上, \tag{9.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})=0,\qquad 在\partial\Omega 上. \tag{9.12}$$

另外假设 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 还满足初始条件

$$t=0:\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0, \tag{9.13}$$

其中 $\boldsymbol{E}_0$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 为满足如下相容性条件的向量函数：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}_0=\frac{\rho_0}{\varepsilon},\quad \rho_0=\rho(0,x,y,z), \tag{9.14}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}_0=0, \tag{9.15}$$

$$\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{n}=\mathbf{0},\ 在\partial\Omega 上. \tag{9.16}$$

下面即以定解问题 (9.6)—(9.9), (9.11)—(9.13) 为例，对利用达尔文模型的求解问题进行讨论.

### 9.3. 达尔文模型

由引理 6.3 的证明可见， $\boldsymbol{E}$ 的分解式 (9.5) 并不是唯一的. 事实上，只要取 $\boldsymbol{E}_L=-\operatorname{grad}\phi$ 即可得到这样一个分解，而 $\phi$ 为泊松方程

$$-\Delta\phi=\operatorname{div}\boldsymbol{E}$$

的任意一个解. 但我们只要对 $\boldsymbol{E}_T$ 添加某些条件, 即可保证分解式 (9.5) 的唯一性. 作为引理 6.3 的精确化，我们有

**引理 9.1.** $\Omega$ 中任一向量场 $\boldsymbol{A}$ 均可分解为一横场 $\boldsymbol{A}_T$ 与一纵场 $\boldsymbol{A}_L$ 的叠加：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_T+\boldsymbol{A}_L. \tag{9.17}$$

若要求 $\boldsymbol{A}_L$ 满足条件

$$\boldsymbol{A}_L\times\boldsymbol{n}=\mathbf{0},\ 在\partial\Omega 上, \tag{9.18}$$

则上述分解还是唯一的，且 $\boldsymbol{A}_L$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{A}_L=-\operatorname{grad}\psi,$$

其中 $\psi$ 为下述问题的解：

$$-\Delta\psi = \operatorname{div} \boldsymbol{A}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \tag{9.19}$$

$$\psi = C, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{9.20}$$

这里 $C$ 为任一常数.

**证明** 由引理 6.3 的证明知，$\boldsymbol{A}$ 有分解式 (9.17) 等价于 $\boldsymbol{A}_L = -\operatorname{grad}\psi$, 其中 $\psi$ 为方程 (9.19) 的解. 注意到在 $\partial\Omega$ 上 $\operatorname{grad}\psi\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ 的充要条件为 $\operatorname{grad}\psi$ 的切向分量为零，即 (9.20) 成立. 所以 $\boldsymbol{A}$ 有满足边界条件 (9.18) 的分解式 (9.17) 等价于 $\boldsymbol{A}_L = -\operatorname{grad}\psi$, 其中 $\psi$ 为边值问题 (9.19)—(9.20) 的解. 但对不同的常数 $C$, 边值问题 (9.19)—(9.20) 的解之间只相差一个常数. 这样，由其解所确定的 $\boldsymbol{A}_L$ 就是唯一的. 引理证毕.

现在假定 $\boldsymbol{E}$ 的分解 (9.5) 满足上引理的要求，即设在边界 $\partial\Omega$ 上，$\boldsymbol{E}_L \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$. 在方程 (9.6) 中忽略 $\varepsilon\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial t}$, 麦克斯韦方程组 (9.6)—(9.9) 即化为如下的达尔文模型：

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}_L}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{j}, \tag{9.21}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{0}, \tag{9.22}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}_L = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{9.23}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}_T = 0, \tag{9.24}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_L = \boldsymbol{0}, \tag{9.25}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{9.26}$$

以下的讨论均以上一段中给出的边值问题为例进行.

注意到 $\boldsymbol{E}_L$ 在边界上满足引理 9.1 所要求的条件, 并注意到 (9.13) 的第二个条件，边界条件 (9.11)—(9.12) 可写为

$$\boldsymbol{E}_L \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{9.27}$$

$$\boldsymbol{E}_T \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{9.28}$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{n}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{9.29}$$

至于初始条件，对 $\boldsymbol{E}$ 而言此时只须给出 $\boldsymbol{E}_L$ 在 $t=0$ 的值，于是应有

$$t=0:\boldsymbol{E}_L=\boldsymbol{E}_{0L},\tag{9.30}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{0L}$ 为 $\boldsymbol{E}_0$ 按引理 9.1 的分解给出的纵场部分，它满足相容性条件

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}_{0L}=\frac{\rho_0}{\varepsilon},\quad \rho_0=\rho(0,x,y,z),$$

并由 (9.18) 式，有

$$\boldsymbol{E}_{0L}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},\quad 在\partial\Omega 上.$$

由 §5 的讨论知，麦克斯韦方程组的初－边值问题是双曲型方程的混合问题. 但达尔文模型 (9.21)—(9.26) 虽然形式上仍是一个包含未知函数关于时间 $t$ 的偏导数的方程组，然而下面我们会看到，其定解问题本质上可化为椭圆型方程的边值问题来解决. 事实上，我们有如下结果 (见 [13]).

**定理 9.1.** 达尔文模型的定解问题 (9.21)—(9.30) 等价于对任一给定的 $t$ 值，求解下述三个椭圆边值问题：

(1°) $\boldsymbol{E}_L=-\operatorname{grad}\phi$, 其中 $\phi$ 为下述泊松方程狄利克雷问题的解：

$$-\Delta\phi=\frac{\rho}{\varepsilon},\ 在\Omega 内,\tag{9.31}$$

$$\phi=C(t),\ 在\partial\Omega 上,\tag{9.32}$$

而 $C(t)$ 为一个只依赖于 $t$ 的任意函数.

(2°) $\boldsymbol{B}$ 为下述问题的解：

$$-\Delta\boldsymbol{B}=\mu\mathrm{rot}\boldsymbol{j},\ 在\Omega 内,\tag{9.33}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,\ 在\Omega 内,\tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{n},\ 在\partial\Omega 上,\tag{9.35}$$

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{n}=\mu\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{n},\ 在\partial\Omega 上.\tag{9.36}$$

(3°) $\boldsymbol{E}_T$ 为下述问题的解：

$$\Delta\boldsymbol{E}_T=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\boldsymbol{B},\ 在\Omega 内,\tag{9.37}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}_T=0,\ 在\Omega 内,\tag{9.38}$$

$$\boldsymbol{E}_T\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},\ 在\partial\Omega 上.\tag{9.39}$$

**证明**　设 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 为达尔文模型 (9.21)—(9.30) 的解. 由 $\boldsymbol{E}_L$ 满足的方程 (9.25) 、边界条件 (9.27) 以及 (9.23), 利用引理 9.1 知，存在 $\phi$ 使

$$\boldsymbol{E}_L = -\mathrm{grad}\,\phi,$$

且 $\phi$ 满足 (9.31) 和 (9.32) 式，即 (1°) 成立.

将旋度算子 rot 作用于 (9.21) 式的两侧，利用公式

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}, \tag{9.40}$$

并注意 (9.25) 与 (9.26) 式，我们有

$$-\Delta\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{j},$$

即 (9.33) 式成立. 由 (9.26) 及 (9.29) 式，为证明 (2°), 剩下来只需证明满足边界条件 (9.36). 为此只要将 (9.21) 式两端在边界 $\partial\Omega$ 上与 $\boldsymbol{n}$ 作向量积，并利用已知的边界条件 (9.27), 即立得 (9.36) 式. 所以 (2°) 成立.

对于 (3°), 由 (9.24) 及 (9.28) 式，我们只需证明 (9.37). 将旋度算子 rot 作用于方程 (9.22) 的两端，利用公式 (9.40) 并注意 (9.24) 式，立即得到 (9.37) 式.

所以，如果 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 为达尔文模型的定解问题 (9.21)—(9.30) 的解，则 $\boldsymbol{E}_L$ 、 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}_T$ 分别满足问题 (1°) 、 (2°) 和 (3°).

反之，设 $\boldsymbol{E}_L$ 、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}_T$ 分别为问题 (1°) 、(2°) 和 (3°) 的解. 下面证明 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_T + \boldsymbol{E}_L$ 及 $\boldsymbol{B}$ 必为达尔文模型的定解问题 (9.21)—(9.30) 的解.

由 (1°), 易知 (9.23) 、 (9.25) 及 (9.27) 式成立，而 (9.24) 、(9.26) 、 (9.28) 及 (9.29) 即为 (9.38) 、 (9.34) 、 (9.39) 及 (9.35). 剩下来只需证明 (9.21)—(9.22) 及 (9.30) 式.

首先说明由 (1°) 给出的 $\boldsymbol{E}_L$ 满足初始条件 (9.30). 事实上，由 (9.31) 式知，在 $t = 0$ 时有

$$-\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\,\phi_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon},$$

这里一个量的下标为零，表示该量在 $t = 0$ 时的值. 由相容性条件 (9.14), 并注意到 (9.24), 有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}_{0L} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}.$$

由以上两式得

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\phi_0 + \boldsymbol{E}_{0L}) = 0.$$

这表明 $\mathrm{grad}\,\phi_0 + \boldsymbol{E}_{0L}$ 是横场. 但另一方面, $-\mathrm{grad}\,\phi_0 = \boldsymbol{E}_L|_{t=0}$ 与 $\boldsymbol{E}_{0L}$ 均为满足引理 9.1 要求的纵场部分, 因而 $\mathrm{grad}\,\phi_0 + \boldsymbol{E}_{0L}$ 还是纵场, 且

$$(\mathrm{grad}\,\phi_0 + \boldsymbol{E}_{0L}) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \text{ 在}\partial\Omega \text{ 上}.$$

于是由引理 9.1 可得

$$-\mathrm{grad}\,\phi_0 = \boldsymbol{E}_{0L}.$$

这说明初始条件 (9.30) 成立.

现在证明 $\boldsymbol{E}_L$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足方程 (9.21). 利用公式 (9.40) 并注意 (9.34) 式, 方程 (9.33) 可改写为

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \mu\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}, \text{ 在}\Omega \text{ 内},$$

故 $\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \mu\boldsymbol{j}$ 为一纵场. 此外, 边界条件 (9.36) 给出

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \mu\boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \text{ 在}\partial\Omega \text{ 上}.$$

这样, 由引理 9.1 知

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \mu\boldsymbol{j} = -\mathrm{grad}\,\psi, \tag{9.41}$$

其中 $\psi$ 满足

$$-\Delta\psi = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \mu\boldsymbol{j}), \text{ 在}\Omega \text{ 内}, \tag{9.42}$$

$$\psi = C_1(t), \text{ 在}\partial\Omega \text{ 上}, \tag{9.43}$$

这里 $C_1(t)$ 为一个只依赖于 $t$ 的任意函数. 但注意到 $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = 0$, 并利用连续性方程 (9.10), (9.42) 式可改写为

$$-\Delta\psi = \mu\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

将方程 (9.31) 两端关于 $t$ 求导, 与上式比较, 并注意它们满足的边界条件, 即得

$$\psi = \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} + C_2(t),$$

其中 $C_2(t)$ 为一个只依赖于 $t$ 的任意函数. 由于 $\boldsymbol{E}_L = -\text{grad}\,\phi$, 上式给出

$$-\text{grad}\,\psi = \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}_L}{\partial t},$$

将其代入 (9.41) 即得方程 (9.21).

下面证明 $\boldsymbol{E}_T$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 (9.22) 式. 利用公式 (9.40) 和 (9.38) 式, 方程 (9.37) 可改写为

$$\text{rot}\left(\text{rot}\boldsymbol{E}_T + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{9.44}$$

由引理 6.2, 存在 $\psi$ 使

$$\text{rot}\boldsymbol{E}_T + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\text{grad}\,\psi. \tag{9.45}$$

但注意到 (9.34) 式, 显然 $\text{rot}\boldsymbol{E}_T + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 又是一个横场, 所以上式右端的 $\psi$ 必为调和函数:

$$-\Delta\psi = 0, \text{ 在}\Omega\text{ 内}. \tag{9.46}$$

另外, 我们指出, 利用边界条件 (9.39) 可得

$$\text{rot}\boldsymbol{E}_T \cdot \boldsymbol{n} = 0, \text{ 在}\partial\Omega\text{ 上}. \tag{9.47}$$

事实上, 对 $\partial\Omega$ 上任一以 $l$ 为边缘的曲面块 $S$, 由斯托克斯公式有

$$\int\int_S \text{rot}\boldsymbol{E}_T \cdot \boldsymbol{n}\text{d}S = \int_l \boldsymbol{E}_T \cdot \text{d}\boldsymbol{l}. \tag{9.48}$$

(9.39) 式说明, 在 $\partial\Omega$ 上 $\boldsymbol{E}_T$ 平行于法向量 $\boldsymbol{n}$, 因而与切向量正交, 这给出 $\boldsymbol{E}_T \cdot \text{d}\boldsymbol{l} = 0$. 从而, 由 (9.48) 式得

$$\int\int_S \text{rot}\boldsymbol{E}_T \cdot \boldsymbol{n}\text{d}S = 0$$

对 $\partial\Omega$ 上的任一曲面块 $S$ 成立. 由 $S$ 的任意性即得 (9.47) 式.

由 (9.47) 与 (9.35) 式, 我们有

$$\left(\text{rot}\boldsymbol{E}_T + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \text{ 在}\partial\Omega\text{ 上}.$$

从而由 (9.45) 式，得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0, \text{ 在}\partial\Omega\text{ 上}. \tag{9.49}$$

由数理方程知识知，调和方程的齐次诺依曼问题 (9.46) 及 (9.49) 只有 (可依赖于 $t$ 的) 常数解. 从而由 (9.45) 给出 (9.22) 式. 定理 9.1 证毕.

**注 9.1.** 为求解方程组 (9.21)—(9.26), 除边界条件 (9.27) — (9.29) 及初始条件 (9.30) 外，还应该给出关于 $\boldsymbol{B}$ 的初始条件

$$t=0: \quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0. \tag{9.50}$$

因此，要证明达尔文模型的定解问题与定理 9.1 中给出的相应定解问题等价，尚需说明由问题 (9.33)—(9.36) 给出的 $\boldsymbol{B}$ 满足初始条件 (9.50). 为此，当然应要求 $\boldsymbol{B}_0$ 满足一定的相容性条件. 由 (9.33)—(9.34) 及 (9.36) 易见，这些相容性条件应为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}_0=0, \quad \text{在}\Omega\text{ 内}, \tag{9.51}$$

$$-\Delta\boldsymbol{B}_0=\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_0, \quad \text{在}\Omega\text{ 内} \tag{9.52}$$

及

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{n}=\mu\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{n}, \quad \text{在}\partial\Omega\text{ 上}, \tag{9.53}$$

其中 $\boldsymbol{j}_0=\boldsymbol{j}(0,x,y,z)$. 可以证明，只要满足上述相容性条件，问题 (9.33)—(9.36) 的解 $\boldsymbol{B}$ 必满足初始条件 (9.50).

为证明此，由相容性条件 (9.51)—(9.53), 只要在 $t=0$ 时证明问题 (9.33)—(9.36) 解的唯一性，即证明当 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}$ 时，该问题只有平凡解 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. 实际上，此时利用 (9.40) 及 (9.34) 式，(9.33) 式可以写为

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}, \quad \text{在}\Omega\text{ 内}, \tag{9.54}$$

即 $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ 为纵场. 但 $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ 又是横场，而且由 (9.36) 式知，它还满足边界条件

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}, \quad \text{在}\partial\Omega\text{ 上}. \tag{9.55}$$

于是由引理 9.1 得

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}, \quad \text{在}\Omega\text{ 内}, \tag{9.56}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为纵场. 由 (9.34) 及 (9.35) 式知, $\boldsymbol{B}$ 又是横场, 且满足边界条件

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \text{在}\partial\Omega\text{ 上}. \tag{9.57}$$

由此可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ (参见第二章引理 3.1).

最后我们指出, 在一定条件下, 达尔文模型确为麦克斯韦方程组的一个好的近似. 设 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}^D$ 、 $\boldsymbol{B}^D$ 分别表示麦克斯韦方程组定解问题 (9.6)—(9.13) 与达尔文模型定解问题 (9.21)—(9.30) 及 (9.50) 的解, 那么深入的讨论可以证明当 $\eta=\omega l/c\to 0$ 时, $\boldsymbol{E}^D$ 、 $\boldsymbol{B}^D$ 在一定意义下分别趋向于 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{B}$ (见 [13]). 而且实际上, 对电场强度的纵场部分而言, 达尔文模型的解给出了原麦克斯韦方程组解的精确值, 即 $\boldsymbol{E}_L^D=\boldsymbol{E}_L$. 我们现在对后一结论予以证明. 由方程 (9.6) 与 (9.21), 我们得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}_T}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}_L}{\partial t}-\frac{1}{\mu}\text{rot}\boldsymbol{B}\\&=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}_L^D}{\partial t}-\frac{1}{\mu}\text{rot}\boldsymbol{B}^D.\end{aligned}$$

容易看出, $\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}_T}{\partial t}-\dfrac{1}{\mu}\text{rot}\boldsymbol{B}$ 与 $-\dfrac{1}{\mu}\text{rot}\boldsymbol{B}^D$ 都是横场; 而 $\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}_L}{\partial t}$ 与 $\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}_L^D}{\partial t}$ 均为纵场, 且满足

$$\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}_L}{\partial t}\times\boldsymbol{n}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}_L^D}{\partial t}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},\ \text{在}\partial\Omega\text{ 上}.$$

这样, 由引理 9.1, 有

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}_L}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{E}_L^D}{\partial t}.$$

考虑到它们满足的初始条件 (9.13) 与 (9.30), 即得

$$\boldsymbol{E}_L=\boldsymbol{E}_L^D.$$

## 习 题

1. 设有一均匀分布着电荷的无限长直线，其上的电荷线密度 (即单位长度上的电荷量) 为 $\sigma$. 试求该直线所形成的电场的电场强度及电势.

2. 设有一均匀分布着电荷的半径为 $R$ 的球面，其电荷面密度 (即单位面积上的电荷量) 为 $\sigma$. 试求该球面所形成电场的电场强度及电势.

3. 在一场强为 $\boldsymbol{E}_0$ ($\boldsymbol{E}_0$ 为常向量) 的电场中，置入一半径为 $R$ 的导电球体，试导出球外电势所满足的方程及相应的定解条件.

4. 对在 $P_0$ 及 $P_1$ 处分别置放 $-q$ 及 $+q$ 的点电荷所形成的电偶极子，其偶极矩 $\boldsymbol{m}=q\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{P_0P_1}$. 试证明当 $l\to 0$, $q\to+\infty$, 但 $m=ql$ 保持不变时，此偶极子产生的电场的电势为

$$\phi(P)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{m}\cdot\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r_{P_0P}}\right),$$

其中 $\mathrm{grad}_P$ 表示关于 $P$ 点的梯度.

5. 试计算由习题 4 给出的电偶极子所形成的电场的电场强度.

6. 试计算电流强度为 $I$ 的无限长的直导线所产生的磁场的磁感强度.

7. 设一半径为 $R$ 的圆周电路上的电流强度为 $I$. 试计算在通过圆心垂直于圆周所在平面的直线上，由该圆周电路产生的磁场的磁感强度.

8. 设在真空中有一圆柱形磁场

$$B(P)=\begin{cases}\dfrac{2I}{Cr}, & \text{当} r\geqslant R \text{时},\\[2ex] \dfrac{2I}{CR^2}r, & \text{当} r<R \text{时},\end{cases}$$

其中 $r$ 为所考察点 $P$ 到对称轴的距离， $I$ 及 $R$ 为常数，而在任一点磁场的方向与过该点绕对称轴旋转的方向相同. 试求激发这个磁场的电流分布.

9. 设在法线为 $\boldsymbol{n}$ 的平面上，有一电流强度为 $I$ 的环形电流，其方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手系. 又设该环形电流所围的面积为 $S_0$, 则

$$\boldsymbol{m}=IS_0\boldsymbol{n}$$

称为该环形电流的磁偶极矩. 试证明, 当 $S_0 \to 0$ (环收缩到一点), $I \to +\infty$, 但 $\boldsymbol{n}$ 和 $m = IS_0$ 保持不变时, 由该磁偶极矩产生的磁场的矢势为

$$\boldsymbol{A}(P) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi}\mathrm{rot}_P \frac{1}{\boldsymbol{r}_{OP}},$$

其中 $\mathrm{rot}_P$ 表示对 $P$ 点的旋度.

10. 在自由电磁场的情况, 证明: 在保持洛伦兹条件的规范变换下, 可使标势恒为零.

11. 在各向同性的导体中, 欧姆定律具有以下形式:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$

其中 $\sigma$ 称为电导率. 试证在真空中导体的连续性方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0.$$

由此证明导体内的任何电荷分布均随时间的增加而指数地衰减到零.

12. 试给出在库仑规范下, 电磁场的标势 $\phi$ 与矢势 $\boldsymbol{A}$ 所满足的方程.

13. 试讨论对静磁场的矢势, 如何决定其在媒质交界面上的条件.

14. 设向量函数 $\boldsymbol{B}(x,y,z) = (B_x, B_y, B_z)$ 在 $z \neq 0$ 时具有一阶连续偏导数, 在 $z = 0$ 时具有第一类间断, 且

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \quad z \neq 0.$$

若 $B_z$ 在 $z = 0$ 时连续, 试证明存在连续向量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 使

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}.$$

15. 对媒质中的电磁场, 推导其电磁动量密度向量及电磁动量流密度张量的表达式 (7.47) 及 (7.48).

## 参考文献

[1] 曹昌祺. 电动力学. 北京: 人民教育出版社, 1962

[2] 杰克逊 J D. 经典电动力学 (上册). 朱培豫译. 北京：人民教育出版社，1979

[3] 严济慈. 电磁学. 北京：高等教育出版社，1988

[4] 谷超豪，李大潜等. 数学物理方程. 上海：上海科学技术出版社，1987

[5] 谷超豪，李大潜，沈玮熙. 应用偏微分方程. 北京：高等教育出版社，1993

[6] 谷超豪. 正对称型方程组理论的一些发展和应用. 数学论文集，复旦大学数学研究所，1964. 42～58

[7] 李大潜等. 有限元素法在电法测井中的应用. 北京：石油工业出版社，1980

[8] 李大潜等. 自共轭椭圆型方程具有等值面边界条件的边值问题 (I)、(II). 复旦学报. 1 (1976), 61～71; 3-4 (1976), 136～145

[9] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法，卷 II. 熊振翔，杨应辰译. 北京：科学出版社，1981

[10] 陈恕行. 偏微分方程概论. 北京：人民教育出版社，1981

[11] Bers L, John F, Schechter M. *Partial Differential Equations*. New York: Wiley–Interscience, 1964

[12] Damlamian A, Li Ta-tsien. *Boundary homogenization for elliptic problems*. J. Math. Pures et Appl., 66 (1987). 351～361

[13] Degond P, Raviart PA. *An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations*. Forum Math., 4 (1992). 13～44

[14] Friedrichs K O. *Symmetric hyperbolic linear differential equations*. Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954). 345～392

[15] Hewett D W, Nielson C. *A multidimensional quasineutral plasma simulation model*. J. Comput. Phys., 29 (1978). 219～236

[16] Hewett D W, Boyd J K. *Streamlined Darwin simulation of nonneutral plasmas*. J. Comput. Phys., 70 (1987). 166～181

[17] Li Ta-tsien. *A class of non-local boundary value problems for partial differential equations and its applications in numerical analysis*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 28 (1989). 49～62

[18] Nielson C W, Lewis H R. *Particle code models in the non-radiative limit.* Methods of Computational Physics, Vol.16, 367~388. New-York: Academic Press, 1976

[19] 费曼 R P, 莱登 R B, 桑兹 M. 费曼物理讲义, 第二卷. 王子辅译. 上海: 上海科学技术出版社, 1981

[20] 麦克斯韦 J C. 电磁通论. 戈革译. 武汉: 武汉出版社, 1992

# 第二章　流体力学

## §1. 理想流体力学方程组

### 1.1. 预备知识

在本节中，我们将对理想流体建立其动力学方程组．所谓*理想流体*，是指忽略粘性及热传导的流体．实际的流体，通常总是有粘性及热传导的，在下一节中将进一步加以讨论．必须指出，理想流体在很多情况下，是一个合理的近似．例如，在研究飞行器周围的流场分布时，除飞行器表面附近一薄层中通常必须考虑粘性及热传导的影响外，在流场中其余的部分均可假设为理想流体来进行讨论；即使对整个流场均假设为理想流体，也可得出相当合理的结果．因此，对理想流体的讨论，不仅具有理论上的重要意义，而且具有实际上的重大价值．此外，这里所讨论的是可压缩的流体，即气体或在高压下的液体．对不可压缩流体 (在常压下的流体) 的讨论，也将在下一节中进行．

我们用 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 及 $p,\rho,T$ 等来描述流体的状态 (运动状态及热力学状态)．在不定常运动的情形，它们都是时间 $t$ 及位置的笛卡儿坐标 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的函数．现将其意义分别说明如下．

$\boldsymbol{u}$ 为*速度向量*．这是指流体微元的宏观运动速度，不是指个别流体分子的不规则运动速度．这样，若有过点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的面积微元 $\mathrm{d}S$，其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，则在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内沿 $\boldsymbol{n}$ 方向流过 $\mathrm{d}S$ 的流体体积为

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

$\rho$ 为*质量密度*，即单位体积流体的质量．这样，在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内沿 $\boldsymbol{n}$ 方向流过 $\mathrm{d}S$ 的流体质量为

$$\rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

我们称 $\rho\boldsymbol{u}$ 为*质量流向量*．由上述可知，在单位时间内，沿任何方向 $\boldsymbol{n}$ 流过垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的单位面积的流体质量为 $\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$．

$\rho\boldsymbol{u}$ 又称为*动量密度向量*，即单位体积流体的动量. 在时间区间 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 中沿 $\boldsymbol{n}$ 方向流过 $\mathrm{d}S$ 的流体动量为

$$\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\mathrm{d}t = \rho(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ 为速度向量的张量积，即

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{pmatrix},$$

而 $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 按普通意义下的乘法，下同. 称 $\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ 为*动量流张量*.

$p$ 为*压强*，即作用在单位面积上的流体压力，其方向垂直于该面积，这是由于忽略了流体的内摩擦 (粘性) 的缘故. 在各向同性的假设下，在过同一点具不同法线方向的单位面积上，所受的压力大小均相等. 这里所谓各向同性，是指流体的物理性质不与任何特殊的预先给定的空间方向有关. 通常的流体均能满足这一性质. 这样，面积微元 $\mathrm{d}S$ 受到其单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的正向一侧的流体压力为

$$-p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{1.4}$$

其中负号表示是压力.

$T$ 为*绝对温度*. 根据热力学知识，一切描述热力学状态的量中只有两个是相互独立的. 因此， $\rho, p$ 及 $T$ 这三个热力学量之间有一个确定的函数关系式

$$p = f(\rho, T). \tag{1.5}$$

对不同的流体，它具有不同的形式. (1.5) 式称为流体的*状态方程*. 特别，若状态方程可写为

$$p = R\rho T, \tag{1.6}$$

则称为*理想气体*，其中 $R$ 为一个正常数.

下面再引入一个热力学量. 以 $e$ 表示单位质量流体的*内能*，即由流体分子的不规则热运动所具有的动能以及由于分子间相对位置所决定的势能的总和. 对理想气体，可以证明它的分子间没有相互作用，因

而没有分子势能，而其内能只和温度有关，即 $e$ 只是 $T$ 的函数. 特别若成立

$$e = c_V T, \tag{1.7}$$

其中 $c_V$ 为一正常数，称为 *定容比热*，就称气体为 *多方* (polytropic) 气体.

流体的能量由内能及宏观动能两部分组成，因此 $\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$ 为 *能量密度*，即单位体积中流体的能量，其中 $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. 这样，在时间区间 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内沿 $\boldsymbol{n}$ 方向流过 $\mathrm{d}S$ 的流体能量为

$$(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

我们称 $(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u}$ 为 *能量流向量*.

### 1.2. 理想流体力学方程组

对于理想流体，根据在运动过程中应满足的质量、动量及能量守恒定律，就可推导出理想流体动力学的基本方程组.

**1) 质量守恒定律**

在所考察的区域中任取一光滑的闭曲面 $\Gamma$, 其所围的区域记为 $\Omega$. 根据质量守恒定律，在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内，区域 $\Omega$ 中流体质量的增加量

$$\int_\Omega \rho(t_2, \boldsymbol{x})\mathrm{d}x - \int_\Omega \rho(t_1, \boldsymbol{x})\mathrm{d}x$$

(其中 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$), 应等于在此段时间内经过边界 $\Gamma$ 流入 $\Omega$ 中的流体的质量，而后者，根据 (1.2) 式应为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma \rho\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

这样，质量守恒律可写为如下的积分形式:

$$\int_\Omega (\rho(t_2, \boldsymbol{x}) - \rho(t_1, \boldsymbol{x}))\mathrm{d}x = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma \rho\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$
$$\forall \Omega, \forall [t_1, t_2]. \tag{1.9}$$

在所考察的函数连续可微的条件下，由格林公式，上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u})\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \quad \forall \Omega, \forall [t_1, t_2].$$

于是，由 $\Omega$ 及 $[t_1,t_2]$ 的任意性及被积函数的连续性，就得到质量守恒定律的微分形式如下：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0. \tag{1.10}$$

这通常称为连续性方程.

这儿及今后要注意的是，只有在有关状态函数为连续可微的前提下，微分形式的守恒律方程才有意义. 而在这些状态函数的连续可微性不具备的情形 (对应于气体动力学中的激波，无论在理论上还是应用上，这恰恰是最为重要的情形)，相应的积分形式的守恒律方程还是有意义的，且这构成一切进一步讨论的出发点 (参见 §4).

**2) 动量守恒定律**

根据动量守恒定律，在时间区间 $[t_1,t_2]$ 内区域 $\Omega$ 中流体动量的增加量

$$\int_\Omega \rho\boldsymbol{u}(t_2,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x-\int_\Omega \rho\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x$$

应等于在此段时间内经过边界 $\Gamma$ 流入 $\Omega$ 中的流体的动量，再加上此段时间内作用在 $\Omega$ 上的力的冲量. 其中前者，由于 (1.3) 式应为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma \rho(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t;$$

而后者由作用在 $\Omega$ 上的体积力所构成的冲量及作用在 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 上的表面力所构成的冲量这两部分组成. 设体积力密度，即单位质量流体所受的外力，为 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$，那么冲量的第一部分为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

而作用在 $\Gamma$ 上的表面力只有 $\Omega$ 外的流体对它的压力，故由 (1.4) 式知冲量的第二部分为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

这样，动量守恒定律可写为如下的积分形式：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\rho\boldsymbol{u}(t_2,\boldsymbol{x})-\rho\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x\\ =\ &-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma \rho(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma} p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
$$
$$
\forall\Omega, \forall[t_1,t_2]. \tag{1.11}
$$

在所考察的函数连续可微的条件下，由格林公式，上式可写为

$$
\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u})\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{I})\mathrm{d}x\mathrm{d}t
$$
$$
+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall\Omega, \forall[t_1,t_2], \tag{1.12}
$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量. 由上式，利用被积函数的连续性以及 $\Omega$ 与 $[t_1,t_2]$ 的任意性，即得动量守恒定律的微分形式如下:

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u})+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{I})=\rho\boldsymbol{F}, \tag{1.13}
$$

或写成分量的形式为

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k u_i+p\delta_{ki})=\rho F_i \quad (i=1,2,3), \tag{1.14}
$$

其中 $\delta_{ki}$ 为克罗内克 (Kronecker) 记号.

这儿指出，利用连续性方程 (1.10) 可将上述方程的形式化简，得到

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=F_i \quad (i=1,2,3), \tag{1.15}
$$

或写为

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p=\boldsymbol{F}, \tag{1.16}
$$

其中

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.17}
$$

表示固定流体质点 (而不是空间点 !) 时对 $t$ 的导数. 事实上, 由于对任意固定的流体质点的运动规律 $x_k=x_k(t)$ $(k=1,2,3)$ 成立 $\dot{x}_k(t)=u_k$

$(k=1,2,3)$, 于是在固定流体质点时, 一函数 $f(t,\boldsymbol{x})$ 关于 $t$ 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{x}_k(t)\\ &= \frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial f}{\partial x_k}.\end{aligned}$$

方程 (1.15) 或 (1.16) 通常称为欧拉 (Euler) 方程. 它与 (1.14) 不同, 不具有散度型的守恒律形式.

**3) 能量守恒定律**

根据能量守恒定律, 在时间区间 $[t_1,t_2]$ 内区域 $\Omega$ 中流体能量的增加量

$$\int_\Omega(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)(t_2,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x-\int_\Omega(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)(t_1,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x$$

应等于在此段时间内经过边界 $\Gamma$ 流入 $\Omega$ 中的流体的能量, 再加上此段时间内作用在 $\Omega$ 上的力所作的功. 由 (1.8) 式知, 前者应为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

而后者则应由两部分组成: 第一部分为作用在 $\Omega$ 上的体积力所作的功

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

而第二部分为作用在 $\Gamma$ 上的表面力 (此时为 $\Omega$ 外的流体对它的压力) 所的作功, 由 (1.4) 式应为

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma p\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

于是能量守恒定律可写为如下的积分形式:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)(t_2,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x-\int_\Omega(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)(t_1,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\\ =\ &-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma p\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad\forall\Omega,\forall[t_1,t_2].\end{aligned}\tag{1.18}$$

在有关函数连续可微的假设下，利用格林公式，上式可改写为

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\mathrm{div}\,((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)\boldsymbol{u})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad\forall\Omega,\forall[t_1,t_2].\end{aligned}$$

于是利用 $\Omega$ 与 $[t_1,t_2]$ 的任意性以及被积函数的连续性，由上式可得能量守恒定律的微分形式如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\mathrm{div}\,((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}.\tag{1.19}$$

利用连续性方程 (1.10), 上式可简化为如下的形式：

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(e+\frac{u^2}{2})+\rho\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,(e+\frac{u^2}{2})+\mathrm{div}\,(p\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u},\tag{1.20}$$

或

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e+\frac{u^2}{2})+\mathrm{div}\,(p\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u},\tag{1.21}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意义见 (1.17) 式. 注意到

$$\mathrm{div}\,(p\boldsymbol{u})=p\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,p$$

及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{u^2}{2})=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$, 利用欧拉方程 (1.16), 可将 (1.21) 式改写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0.\tag{1.22}$$

又注意到连续性方程 (1.10) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0,$$

(1.22) 式又可进一步改写为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0.\tag{1.23}$$

上面得到的质量、动量及能量守恒方程共有五个. 我们可取, 例如说, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\rho$ 及 $T$ 为未知函数,并利用状态方程 $p=f(\rho,T)$ 及相应的 $e=e(\rho,T)$, 而构成一个封闭的偏微分方程组, 它在连续可微的流场中有效. 这是一个含四个自变数 $(t,x_1,x_2,x_3)$ 及五个未知函数的 一阶拟线性偏微分方程组. 对这一方程组的研究, 特别是有关其间断解 (以激波为原型) 的研究, 迄今为止一直是一个十分重要的课题. 1986 年美国国家研究委员会 (National Research Council) 等单位对数学发展提出的六个重点课题中, 有一个即为"非线性双曲守恒律组" (参见 [11]).

下面我们说明, 在连续可微的流场中, 能量守恒方程 (1.23) 可改写为如下简单的形式:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0, \tag{1.24}$$

即

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}S=0. \tag{1.25}$$

这里 $S$ 是单位质量流体的 熵, 由

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}(\mathrm{d}e+p\mathrm{d}\tau) \tag{1.26}$$

确定. 其中 $\tau$ 为流体的 比容, 即单位质量流体的体积; 显然有 $\tau=\dfrac{1}{\rho}$. (1.24) 式表示在连续可微流场中熵 $S$ 在任一固定的质点上保持为常数. 这与流体是理想流体的假设是一致的. 但这一事实仅在连续可微流场中才能成立, 在流场有间断的情况, 质点越过间断 (激波) 时熵要增加 (参见 §4).

**(1.24) 式的证明** 以 $\rho=\dfrac{1}{\tau}$ 代入 (1.23), 得

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=0.$$

利用熵的定义 (1.26) 式, 上式可写为

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0.$$

这样便证明了 (1.24) 式.

(1.24) 或 (1.25) 式在连续可微的流场中 (也仅限于此 !) 可用来代替能量守恒方程. 此时在流体动力学方程组中宜采用 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\rho$ 及 $S$ 作为未知函数, 并利用形如 $p=f(\rho,S)$, $e=e(\rho,S)$ 等形式的状态方程.

特别对多方气体, 状态方程具有如下形式

$$p=A(S)\rho^{\gamma}, \tag{1.27}$$

其中

$$A(S)=(\gamma-1)\exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right), \tag{1.28}$$

这里 $\gamma>1$ 为一常数, 称 绝热指数, 而 $S_0$ 也为常数. 对于常见气体, $\gamma$ 之值在 1 与 $\frac{5}{3}$ 之间; 对于空气, $\gamma=1.4$. 对多方气体, 熵方程 (1.25) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{p}{\rho^{\gamma}})+\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,(\frac{p}{\rho^{\gamma}})=0. \tag{1.29}$$

这时, 又宜于采用 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\rho$ 及 $p$ 为未知函数, 而利用形如 $e=e(\rho,p)$ 的状态方程.

### 1.3. 理想流体力学方程组的数学结构

现在我们说明, 理想流体力学方程组可写为 一阶拟线性对称双曲组 的形式.

为此, 先将欧拉方程 (动量守恒定律) (1.15) 改写为

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho F_i\quad(i=1,2,3), \tag{1.30}$$

并将熵守恒方程 (1.25) 写为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial S}{\partial x_k}=0. \tag{1.31}$$

利用状态方程 $p=p(\rho,S)$, 又记

$$c^2=\frac{\partial p}{\partial\rho}>0,$$

这里 $c$ 为局部音速, 质量守恒方程 (见 (1.10))

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}+\rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0$$

可利用 (1.31) 式改写为

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}+\rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial p}{\partial S}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial S}{\partial x_k}\right)=0,$$

即

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial p}{\partial x_k}+\rho c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0,$$

或

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{3} \frac{u_k}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial x_k}=0. \tag{1.32}$$

这样, 若以 $(u_1, u_2, u_3, p, S)$ 为未知函数, 将上述方程按动量守恒方程 (1.30)、质量守恒方程 (1.32) 及熵守恒 (能量守恒) 方程 (1.31) 的次序排列, 此方程组可写为如下的矩阵形式:

$$A_0 \frac{\partial U}{\partial t}+A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1}+A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2}+A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3}=C, \tag{1.33}$$

其中, $U=(u_1, u_2, u_3, p, S)^{\mathrm{T}}$,

$$A_0=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1}c^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1=\begin{pmatrix}\rho u_1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \rho u_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho u_1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & u_1\rho^{-1}c^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1\end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \rho u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u_2\rho^{-1}c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \rho u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_3\rho^{-1}c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix},$$

而

$$C = (\rho F_1, \rho F_2, \rho F_3, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

在 $\rho > 0$ (即不出现真空) 的范围内, $A_0$ 为对称正定阵, $A_1$, $A_2$ 及 $A_3$ 均为对称阵. 因此方程组 (1.33) 是一个一阶拟线性对称双曲型偏微分方程组.

对一阶拟线性对称双曲组 (1.33) 可提出柯西问题: 在 $t > 0$ 时求该方程组的解, 使其满足初始条件

$$t = 0 : U = U^0(x_1, x_2, x_3), \tag{1.34}$$

这里 $U^0(x_1, x_2, x_3)$ 为事先给定的向量函数. 在 $U^0(x_1, x_2, x_3)$ 足够光滑的假设下, 可以证明该问题的解 (在局部的时间范围 $0 \leqslant t \leqslant \delta$ ($\delta > 0$) 中) 的存在唯一性. 对方程组 (1.33), 也可以如同第一章 §5 所述那样, 提出相应的初 – 边值问题.

方程组 (1.33) 是从守恒律的微分形式出发推导出的, 它只在连续可微的流场中有意义. 但由于有间断的流场通常可以由一些连续可微的流场拼接而成, 利用这种方程组来间接地构造问题的间断解仍是有意义的. 至于对间断解的直接构造, 则要借助于积分形式的守恒律或相应的散度形式的守恒律方程组. 从数值计算及理论研究的角度, 如果能够使得散度形式的守恒律方程组同时又是对称双曲型方程组, 即使得具散度形式的守恒律方程组

$$\frac{\partial G_i(V)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial G_i^k(V)}{\partial x_k} = C_i(V) \quad (i = 1, \cdots, 5), \tag{1.35}$$

其中 $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)^{\mathrm{T}}$ 为未知函数，其展开的形式

$$\sum_{l=1}^{5}\frac{\partial G_i(V)}{\partial v_l}\frac{\partial v_l}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{5}\frac{\partial G_i^k(V)}{\partial v_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}=C_i(V)$$
$$(i=1,\cdots,5) \tag{1.36}$$

同时为对称双曲组，即

$$\left(\frac{\partial G_i(V)}{\partial v_l}\right)\text{为对称正定阵,}$$
$$\left(\frac{\partial G_i^k(V)}{\partial v_l}\right)(k=1,2,3)\text{为对称阵,}$$

则将会带来一定的方便.

对理想流体力学方程组,有没有可能通过选取 $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)^{\mathrm{T}}$ 为 $u_1,u_2,u_3,p$ 及 $S$ 的适当的组合或函数，来实现这一要求，是一个有趣的研究课题. 这一问题在 20 世纪 60 年代为苏联数学家戈都诺夫 (C. K. Godounov) 所解决 (见 [10] 及其中的参考文献). 美国数学家弗里德里克斯 (K. O. Friedrichs) 与拉克斯 (P. D. Lax) 等也对此进行了研究 (见 [8] 和 [9]). 下面我们对这一问题作进一步的讨论.

我们从守恒律形式的方程组 (1.10) 、 (1.14) 及 (1.19), 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k)=0, \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k u_i+p\delta_{ki})=0\quad(i=1,2,3), \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u_k)=0 \tag{1.39}$$

出发. 这里为简单计，假设 $\boldsymbol{F}=0$. 利用连续性方程 (1.37), 熵守恒方程 (1.31) 可写为如下的守恒律形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho S u_k)=0, \tag{1.40}$$

其中 $\rho S$ 为单位体积流体的熵，而 $\rho S\boldsymbol{u}$ 则称为熵流向量.

现在设法引进新的未知函数 $V=(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4)^{\mathrm{T}}$ (这里为方便计，将分量的下标从零开始)，将方程组 (1.37)—(1.39) 化为如下形式的守恒律组

$$\frac{\partial}{\partial t}L^0_{v_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}L^k_{v_i}=0,\quad i=0,\cdots,4,\tag{1.41}$$

其中 $L^j_{v_i}$ 表示 $L^j$ 关于 $v_i$ 的偏导数 $(j=0,1,2,3)$. 将方程组 (1.41) 写为 (1.36) 的形式，易见

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial G_i}{\partial v_l}\right)&=\left(L^0_{v_iv_l}\right),\\ \left(\frac{\partial G_i^k}{\partial v_l}\right)&=\left(L^k_{v_iv_l}\right),\quad k=1,2,3.\end{aligned}$$

显然，若能找到 (1.41) 形式的守恒律组，由于以上矩阵都是对称阵，只要 $(L^0_{v_iv_l})$ 为正定，即函数 $L^0(V)$ 是严格凸的，则 (1.41) 即为守恒律形式的一阶对称双曲组.

由前几段的讨论知，熵守恒律方程 (1.40) 在连续可微流场中可由守恒律组 (1.37)—(1.39) 推出．仔细考察以上推导过程，可以看出，存在因子 $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ 使

$$\begin{aligned}&v_0\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k)\right)\\ &+\sum_{i=1}^{3}v_i\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_ku_i+p\delta_{ki})\right)\\ &+v_4\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u_k)\right)\\ \equiv\ &\frac{\partial}{\partial t}(\rho S)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho Su_k),\end{aligned}\tag{1.42}$$

其中

$$\begin{aligned}v_0&=-\frac{e+\rho e_\rho-Se_S-\frac{1}{2}u^2}{e_S},\\ v_i&=-\frac{u_i}{e_S}\ (i=1,2,3),\quad v_4=\frac{1}{e_S}.\end{aligned}\tag{1.43}$$

这里 $e=e(\rho,S)$ 视为 $\rho$ 及 $S$ 的函数. 实际上, 我们很容易由 $V$ 的表达式 (1.43) 直接验证 (1.42) 式的正确性. 记

$$\begin{aligned} L^0 &= v_0\rho+\sum_{i=1}^3 v_i\rho u_i+v_4(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)-\rho S, \qquad (1.44)\\ L^k &= v_0\rho u_k+\sum_{i=1}^3 v_i(\rho u_k u_i+p\delta_{ki})\\ &\quad +v_4(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u_k-\rho S u_k, \quad k=1,2,3. \qquad (1.45)\end{aligned}$$

利用 $V$ 的表达式 (1.43), 容易验证

$$v_0\mathrm{d}\rho+\sum_{i=1}^3 v_i\mathrm{d}(\rho u_i)+v_4\mathrm{d}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)=\mathrm{d}(\rho S), \qquad (1.46)$$

故由 (1.44) 式得到

$$\mathrm{d}L^0=\rho\mathrm{d}v_0+\sum_{i=1}^3\rho u_i\mathrm{d}v_i+(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)\mathrm{d}v_4. \qquad (1.47)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L^k &= \rho u_k\mathrm{d}v_0+\sum_{i=1}^3(\rho u_k u_i+p\delta_{ki})\mathrm{d}v_i\\ &\quad +(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u_k\mathrm{d}v_4, \quad k=1,2,3. \qquad (1.48)\end{aligned}$$

以上两式说明

$$L^0_{v_0}=\rho, \quad L^0_{v_i}=\rho u_i \quad (i=1,2,3), \quad L^0_{v_4}=\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2 \qquad (1.49)$$

及

$$\begin{aligned} &L^k_{v_0}=\rho u_k, \quad L^k_{v_i}=\rho u_k u_i+p\delta_{ki} \quad (i=1,2,3),\\ &L^k_{v_4}=(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u_k \quad (k=1,2,3). \qquad (1.50)\end{aligned}$$

这样，方程组 (1.37)—(1.39) 即可写为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}L^0_{v_0}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}L^k_{v_0}=0, \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}L^0_{v_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}L^k_{v_i}=0 \qquad (i=1,2,3), \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}L^0_{v_4}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}L^k_{v_4}=0. \tag{1.53}$$

这就是形如 (1.41) 的守恒律方程组.

上面引进的 $v_0,v_1,v_2,v_3,v_4$ 及 $L^0,L^1,L^2,L^3$ 可以利用热力学关系式写为比较简单的形式. 事实上，由 (1.26) 式有

$$\mathrm{d}e=T\mathrm{d}S+\frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho, \tag{1.54}$$

所以

$$e_S=T,\quad e_\rho=\frac{p}{\rho^2}. \tag{1.55}$$

这样，由 (1.43) 式给出的 $V$ 可写为

$$v_0 = -\frac{e+\rho e_\rho-TS-\frac{1}{2}u^2}{T}, \tag{1.56}$$

$$v_i = -\frac{u_i}{T}\quad (i=1,2,3),\quad v_4=\frac{1}{T}, \tag{1.57}$$

再由 (1.44) 及 (1.45) 式，就有

$$L^0=-\frac{p}{T},\quad L^k=-\frac{p}{T}u_k\quad (k=1,2,3). \tag{1.58}$$

下面说明 $L^0(V)$ (或 $-L^0$) 关于 $V=(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4)^{\mathrm{T}}$ 的严格凸性.

对于所讨论的理想流体，我们假定其内能 $e$ 视为 $\tau$ 及 $S$ 的函数 $e(\tau,S)$ 是严格凸的 (这个假定的合理性见附录二)，即矩阵

$$\begin{pmatrix} e_{\tau\tau} & e_{\tau S} \\ e_{\tau S} & e_{SS} \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

是正定的. 对 $\tau$, $S$ 及 $e$ 作勒让德 (Legendre) 变换 (见附录二), 由勒让德变换的性质知 $\tau e_\tau + Se_S - e$ 是 $e_\tau$ 与 $e_S$ 的严格凸函数. 这样

$$\tau e_\tau + Se_S + \frac{1}{2}u^2 - e(= Tv_0) \tag{1.60}$$

就是 $e_\tau$, $e_S$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ 的严格凸函数, 从而也是 $-e_\tau$, $e_S$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ 的严格凸函数.

**引理 1.1.** 设

$$L = L(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n) \tag{1.61}$$

为其变元的严格凸函数, 且 $L_{\xi_0} < 0$. 则由 (1.61) 式确定的函数

$$\xi_0 = \xi_0(L, \xi_1, \cdots, \xi_n) \tag{1.62}$$

也是其变元的严格凸函数.

**证明** 为书写简单起见, 只对 $n = 1$ 的情况给出证明. 将 $L = L(\xi_0(L, \xi_1), \xi_1)$ 两边关于 $L$ 与 $\xi_1$ 求二阶偏导数, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial L^2} &= -L_{\xi_0\xi_0}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial L}\right)^2 \Big/ L_{\xi_0}, \\
\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial L \partial \xi_1} &= -\left(L_{\xi_0\xi_0}\frac{\partial \xi_0}{\partial L}\frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1} + L_{\xi_0\xi_1}\frac{\partial \xi_0}{\partial L}\right) \Big/ L_{\xi_0}, \\
\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_1^2} &= -\left(L_{\xi_0\xi_0}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial L}\right)^2 + 2L_{\xi_0\xi_1}\frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1} + L_{\xi_1\xi_1}\right) \Big/ L_{\xi_0}.
\end{aligned}$$

由 $L = L(\xi_0, \xi_1)$ 的严格凸性, 有 $L_{\xi_0\xi_0} > 0$ 及 $L_{\xi_0\xi_0}L_{\xi_1\xi_1} - L^2_{\xi_0\xi_1} > 0$. 再注意到 $L_{\xi_0} < 0$, 由以上诸式立即得到 $\dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial L^2} > 0$ 及

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial L^2} & \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial L \partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_1 \partial L} & \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_1^2} \end{pmatrix} \\
&= L^2_{\xi_0}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial L}\right)^2 (L_{\xi_0\xi_0}L_{\xi_1\xi_1} - L^2_{\xi_0\xi_1}) > 0.
\end{aligned} \tag{1.63}$$

这就证明了引理.

因为

$$\frac{\partial}{\partial(-e_\tau)}(Tv_0) = -\tau < 0, \tag{1.64}$$

由引理 1.1 易知, $-e_\tau = p$ 为

$$-Tv_0 = e + \rho e_\rho - TS - \frac{1}{2}u^2, \quad u_1, u_2, u_3, e_S = T$$

的严格凸函数.

**引理 1.2.** 设函数 $L(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ 关于其变量 $\xi_0\ (>0), \xi_1, \cdots, \xi_n$ 为严格凸的, 则

$$M = \frac{1}{\xi_0} L(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n) \tag{1.65}$$

关于变量

$$\eta_0 = \frac{1}{\xi_0}, \eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \cdots, \eta_n = \frac{\xi_n}{\xi_0} \tag{1.66}$$

是严格凸的.

这个引理的证明作为练习留给读者.

前面已经证明, $p$ 为 $-Tv_0, u_1, u_2, u_3, T$ 的严格凸函数, 利用引理 1.2, 我们知道, $\dfrac{p}{T}$ 为变元 $-v_0, \dfrac{u_1}{T}, \dfrac{u_2}{T}, \dfrac{u_3}{T}, \dfrac{1}{T}$ 的严格凸函数, 即为变元

$$\frac{e + \rho e_\rho - TS - \frac{1}{2}u^2}{T}, \frac{u_1}{T}, \frac{u_2}{T}, \frac{u_3}{T}, \frac{1}{T} \tag{1.67}$$

的严格凸函数, 从而也是由 (1.56) 与 (1.57) 式给出的 $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ 的严格凸函数. 这就证明了我们的结论.

这里指出, 由形如 (1.41) 的守恒律方程组, 可以得到另一个附加的守恒律

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=0}^{4} v_i L^0_{v_i} - L^0\right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=0}^{4} v_i L^k_{v_i} - L^k\right) = 0. \tag{1.68}$$

容易验证，上式就是熵守恒律方程 (1.40).

此外，由 $L^0$ 及其关于新未知函数 $V$ 的偏导数的表达式 (1.44) 及 (1.49) 以及我们已经证明的 $L^0$ 关于 $V$ 的严格凸性，可以看出，$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ 及 $L^0$ 恰为原未知函数 $\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, (\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)$ 及 $\rho S$ 的勒让德变换.

最后，我们讨论一般的守恒律方程组

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} B^k(U) = 0, \tag{1.69}$$

其中 $U = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$, $B^k = (b_1^k, \cdots, b_n^k)^{\mathrm{T}}$ $(k = 1, 2, 3)$. 对于这个方程组，我们下面给出能够通过引入新的未知函数化为守恒律形式的一阶对称双曲组的一个充分必要条件.

**定理 1.1.** *守恒律形式的一阶拟线性偏微分方程组 (1.69) 可以通过未知函数变换*

$$U = U(V) \tag{1.70}$$

*即*

$$u_i = u_i(v_1, \cdots, v_n) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.71}$$

*化为守恒律形式的一阶对称双曲组的充要条件为：存在严格凸的标量函数 $W(U)$ 与向量函数 $H = (h_1(U), h_2(U), h_3(U))^T$, 使成立如下的附加守恒律*

$$\frac{\partial}{\partial t}W(U) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} h_k(U) = 0. \tag{1.72}$$

*这里，$W(U)$ 的严格凸性系指其黑赛矩阵 (Hessian)*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial U^2} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j}\right)$$

*的正定性.*

数量函数 $W(U)$ 也称为守恒律方程组 (1.69) 的*熵函数*，而 $H(U)$ 称为*熵流向量*.

**证明** 必要性. 设未知函数变换 (1.70) 使方程组 (1.69) 化为守

恒律形式的一阶对称双曲组. 这样, 方程组 (1.69) 可写为

$$\frac{\partial U}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial B^k}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_k}=0, \tag{1.73}$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial V}=\left(\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right), \quad \left(\frac{\partial B^k}{\partial V}\right)=\left(\frac{\partial b_i^k}{\partial v_j}\right) \quad (k=1,2,3),$$

且 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 为对称正定阵, $\frac{\partial B^k}{\partial V}$ $(k=1,2,3)$ 为对称阵.

由 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 的对称性, 即

$$\frac{\partial u_i}{\partial v_j}=\frac{\partial u_j}{\partial v_i}, \quad i,j=1,\cdots,n,$$

知道一定存在标量函数 $L^0(V)$, 使 $U$ 为 $L^0$ 的梯度:

$$\frac{\partial L^0(V)}{\partial v_i}=u_i \quad (i=1,\cdots,n). \tag{1.74}$$

又由 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 的正定性知 $L^0(V)$ 是严格凸函数. 同理, 存在 $L^k(V)$ $(k=1,2,3)$ 使

$$\frac{\partial L^k(V)}{\partial v_i}=b_i^k \quad (k=1,2,3; i=1,\cdots,n). \tag{1.75}$$

令

$$W(U) = \sum_{j=1}^{n}u_jv_j-L^0(V), \tag{1.76}$$

$$h_k(U) = \sum_{j=1}^{n}b_j^kv_j-L^k(V) \quad (k=1,2,3), \tag{1.77}$$

则 $W(U)$, $H(U)=(h_1(U),h_2(U),h_3(U))^{\mathrm{T}}$ 即为满足要求的熵函数与熵流向量.

为说明这一点，首先证明 $W(U)$ 的严格凸性. 将 (1.76) 式对 $u_i$ 求偏导数并利用 (1.74) 式，得

$$\frac{\partial W(U)}{\partial u_i}=v_i+\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial v_j}{\partial u_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L^0}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial u_i}=v_i \quad (i=1,\cdots,n). \tag{1.78}$$

(1.76)、(1.74) 与 (1.78) 式说明 $u_1,\cdots,u_n$ 及 $W$ 为 $v_1,\cdots,v_n$ 及 $L^0$ 的勒让德变换. 这样，由 $L^0(V)$ 的严格凸性即得 $W(U)$ 为 $U$ 的严格凸函数.

其次证明附加守恒律 (1.72) 成立. 类似于得到 (1.78) 式的过程，利用 (1.75), 由 (1.77) 式不难验证

$$\frac{\partial h^k(U)}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j^k}{\partial u_i}v_j. \tag{1.79}$$

由 (1.78) 与 (1.79) 式，并利用原方程组 (1.69), 立即有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}W(U)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}h_k(U)\\=&\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial b_j^k}{\partial u_i}v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\\=&\sum_{j=1}^{n}v_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial b_j^k}{\partial x_k}\right)=0.\end{aligned}$$

这就证明了必要性.

充分性. 设存在满足定理条件的 $W(U)$ 与 $H(U)$. 首先说明熵函数 $W(U)$ 与熵流向量 $H(U)$ 必满足下述关系式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial b_i^k}{\partial u_j}-\frac{\partial h_k}{\partial u_j}=0 \quad (k=1,2,3;j=1,\cdots,n). \tag{1.80}$$

事实上，利用原方程组 (1.69), 可将附加守恒律 (1.72) 写为

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial b_i^k}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial h_k}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0. \tag{1.81}$$

(1.81) 式应对一切满足原方程组 (1.69) 的 $U$ 成立，由上式立即得到 (1.80) 式 * .

由 $W(U)$ 的严格凸性知

$$v_i = \frac{\partial}{\partial u_i} W(U) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.82}$$

为一可逆变换. 因此可由 (1.82) 式定义 $U$ 为 $V$ 的函数.

令

$$L^0(V) = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i - W(U), \tag{1.83}$$

$$L^k(V) = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i^k - h_k(U) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1.84}$$

将 (1.83) 式关于 $v_j$ 求偏导数，并利用 (1.82) 式，可得

$$\frac{\partial L^0(V)}{\partial v_j} = u_j \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{1.85}$$

类似地，将 (1.84) 式关于 $v_j$ 求偏导数，并利用 (1.80) 与 (1.82) 式，易得

$$\frac{\partial L^k(V)}{\partial v_j} = b_j^k \quad (k = 1, 2, 3; j = 1, \cdots, n). \tag{1.86}$$

(1.85) 与 (1.86) 式说明，矩阵

$$\frac{\partial U}{\partial V} \quad 及 \quad \frac{\partial B^k}{\partial V} \quad (k = 1, 2, 3)$$

---

* 要说明这一点，只要证明若

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} a_{jk}(U) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0$$

对满足方程组 (1.69) 的一切 $U$ 成立，则 $a_{jk}(V^0) = 0$ $(j = 1, \cdots, n;\ k = 1, 2, 3)$ 对任意给定的 $V^0 = (v_1^0, \cdots, v_n^0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 成立. 为此，令 $u_j^0(x) = v_j^0 + \sum\limits_{k=1}^{3} c_{jk} x_k$ $(j = 1, \cdots, n)$，其中 $c_{jk}$ 为常数. 则对方程组 (1.69) 以 $U^0 = (u_1^0, \cdots, u_n^0)^{\mathrm{T}}$ 为初始值的柯西问题的解 $U$，由上式在 $t = x_1 = \cdots = x_n = 0$ 处给出 $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{3} a_{jk}(V^0) c_{jk} = 0$. 适当选取 $c_{jk}$，即得所需的结果.

均为对称阵．而 (1.83)、(1.82) 以及 (1.85) 式则说明 $v_1,\cdots,v_n$ 与 $L^0$ 为 $u_1,\cdots,u_n$ 与 $W$ 的勒让德变换．这样，由 $W(U)$ 的严格凸性即可推得 $L^0(V)$ 为严格凸函数，从而 $\dfrac{\partial U}{\partial V}$ 是正定阵．这就完成了定理的证明．

### 1.4. 一维理想流体力学方程组

现在考察一个特殊而重要的情况 —— 理想流体的一维运动．假设运动在一柱形管道中进行，其轴为 $x = x_1$ 轴，又设速度方向沿 $x$ 轴，外力也如此，且在垂直于 $x$ 轴的每一截面上，流体的状态均相同．于是速度分量只有 $u = u_1$，而 $u_2 = u_3 = 0$，且一切状态量均与 $x_2, x_3$ 无关．

这时，若记 $F$ 为外力在 $x$ 方向的分量，理想流体力学方程组 (1.10)、(1.14) 及 (1.19) 化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \tag{1.87}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \rho F, \tag{1.88}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)u) = \rho F u, \tag{1.89}$$

或利用 (1.10)、(1.15) 及 (1.25) 式得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \tag{1.90}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = F, \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0. \tag{1.92}$$

它们均为一阶拟线性双曲组．

由于以上两个方程组都不是一阶对称双曲组，为了说明它们的双曲性，有必要在这里介绍一下一个空间变量的一阶拟线性双曲型方程组的定义．考察如下的一阶拟线性偏微分方程组

$$A(t,x,U)\frac{\partial U}{\partial t} + B(t,x,U)\frac{\partial U}{\partial x} = F(t,x,U), \tag{1.93}$$

其中 $U = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$ 为未知函数向量, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 和 $F = (f_1, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}}$ 在所考察的区域中为 $t$, $x$ 及 $U$ 的适当光滑的矩阵函数.

下面我们总假定在所考察的区域中成立

$$\det A \neq 0. \tag{1.94}$$

**定义 1.2.** 假设对所考察区域中任一 $(t, x, U)$, 成立

(a) 特征方程

$$\det(B - \lambda A) = 0 \tag{1.95}$$

有 $n$ 个实根

$$\lambda_1(t,x,U), \lambda_2(t,x,U), \cdots, \lambda_n(t,x,U); \tag{1.96}$$

(b) 设 $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i, \cdots, \eta_n^i)$ 为相应于上述广义特征值 $\lambda_i$ 的广义左特征向量:

$$\eta^i B = \lambda_i \eta^i A, \tag{1.97}$$

则 $\eta^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 构成完全组, 即成立

$$\det(\eta_j^i) \neq 0. \tag{1.98}$$

此时称方程组 (1.93) 为双曲型方程组.

若特征方程 (1.95) 具有 $n$ 个相异的实根:

$$\lambda_1(t,x,U) < \lambda_2(t,x,U) < \cdots < \lambda_n(t,x,U), \tag{1.99}$$

则假设 (b) 自动成立, 此时称方程组 (1.93) 为严格双曲型方程组.

设在 $(t, x)$ 平面上有一光滑曲线 $C$, 其参数方程为

$$C: t = t(\sigma), x = x(\sigma), \quad |t'(\sigma)|^2 + |x'(\sigma)|^2 \neq 0.$$

若沿该曲线 $C$ 成立

$$\det(t'(\sigma)B - x'(\sigma)A) = 0, \tag{1.100}$$

则称曲线 $C$ 为方程组 (1.93) 的特征曲线. 注意到假设 (1.94), 易知在上式成立时, 曲线 $C$ 必可写为

$$C : x = x(t) \tag{1.101}$$

的形式, 而 (1.100) 式则可改写为

$$\det\left(B - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}A\right) = 0. \tag{1.102}$$

现在考察方程组 (1.87)—(1.89) 或方程组 (1.90)—(1.92) 的双曲性. 考虑到未知函数的可逆变换与方程组中方程的可逆线性组合不会改变方程组的类型, 下面我们仅需对方程组 (1.90)—(1.92) 进行讨论. 取 $U = (\rho, u, S)^{\mathrm{T}}$ 为未知函数向量, 此时 $p = p(\rho, S)$. 将此方程组写为 (1.93) 式的形式, 不难得到

$$A = I, \tag{1.103}$$

$$B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \dfrac{c^2}{\rho} & u & \dfrac{p_S}{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \tag{1.104}$$

其中 $I$ 为单位阵, $c^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$ 为局部音速的平方 (参见 §1.3), 而 $p_S = \dfrac{\partial p}{\partial S}$. 所以

$$\det(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ \dfrac{c^2}{\rho} & u-\lambda & \dfrac{p_S}{\rho} \\ 0 & 0 & u-\lambda \end{vmatrix} = (u-\lambda)((u-\lambda)^2 - c^2). \tag{1.105}$$

方程组 (1.90)—(1.92) 的特征方程为

$$(u-\lambda)((u-\lambda)^2 - c^2) = 0, \tag{1.106}$$

其根为

$$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + c. \tag{1.107}$$

这说明，在不出现真空的范围内 (此时 $c>0$)，方程组 (1.90)—(1.92) 是严格双曲型的，其三族特征曲线分别由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-c,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c \tag{1.108}$$

给出.

最后考虑在整个流场中熵恒为常数 (而不仅仅沿流线为常数) 的特殊情况： $S\equiv$ 常数，此时称为*均熵流*. 在这一假设下， $p=p(\rho)$，而 $c^2=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$. 这样，方程组 (1.90)—(1.92) 可写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{1.109}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=F. \tag{1.110}$$

容易验证，在不出现真空的范围内，它是含有两个未知函数 $\rho$ 及 $u$ 的严格双曲型方程组. 在 $F\equiv 0$ 的情形，对这种方程组有一系列有意义的讨论 (参见 [6], [7]). 这是一种相对说来比较容易处理的情形，但仍然有不少问题有待进一步研究.

# §2. 粘性流体力学方程组

## 2.1. 引言

实际的流体和理想流体的主要区别，就在于前者有粘性 (内摩擦) 和热传导性. 这一现象是由流体 (气体与液体) 的分子结构所产生的. 摩擦应力和由热传导而交换的热量，由流体的速度分布和温度分布表示出来的基本规律性，原则上可以由流体分子运动论导出 (参见第八章). 但是作为宏观现象的描述，这些规律性必须作为 (根据实验结果得出的) 某种附加的物理定律而预先给出. 如何给出这些附加的物理定律，是建立有关的数学模型的关键步骤.

在这里首先作一个初步的考察.

先看粘性 (内摩擦性). 牛顿对此指出了一个简单的法则：沿切线方向运动的两层粘性流体平面之间的摩擦切应力，与该方向流体速度沿与平面垂直方向的梯度成正比；简言之，摩擦力和速度梯度成正比. 例

如，假设两层粘性流体平行于平面 $Oxy$, 并沿 $Ox$ 轴方向运动，其速度为 $u$, 则 摩擦切应力 $p_{xz}$ 应为

$$p_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2.1}$$

这儿 $p_{xz}$ 中的下标 $z$ 表示考虑的是垂直于 $z$ 的平面上的摩擦切应力，而下标 $x$ 表示力的方向沿 $x$ 轴. 式中 $\mu$ 称为 粘性系数, 在各向同性的情况，它和所考虑的平面的取向无关，只依赖于所考虑的流体，同时一般也依赖于流体的温度 (通常可认为与流体压力无关).

这儿对牛顿法则作一些说明. 两层粘性流体之间作用的摩擦力是一种内部相互作用的力. 这一层对另一层有摩擦力，而另一层对这一层也有摩擦力，按作用反作用定律，它们大小相等，方向相反. 因此，只有将一团流体从整个流体中割裂开来，才能体现出此团流体之外的流体对此团流体在其表面上的摩擦力. 因此，摩擦力是一种内力，而单位面积上所受的内力称为 应力; 同时，摩擦力总应是在与表面相切的方向，故是一种 切应力.

只有当两层流体之间有相对运动，才能在其间有摩擦力，而摩擦力起着阻碍运动的作用. 如果两层流体之间没有相对运动，摩擦力应为零. 因此，只有在两层流体之间有速度梯度时，才能有摩擦应力. 牛顿法则指出摩擦应力应与速度梯度成正比，而比例系数只依赖于所考虑的流体及其温度. 这是一种线性的假设. 满足这一要求的流体称为 牛顿流体; 而不满足这一要求的流体则称为 非牛顿流体.

由 (2.1) 式，粘性系数的量纲是

$$\frac{\text{力}}{\text{长度}^2}\cdot\frac{\text{长度}}{\text{速度}} = \frac{\text{力}}{\text{长度}\cdot\text{速度}} = \frac{\text{力}\cdot\text{时间}}{\text{长度}^2} = \frac{\text{质量}}{\text{长度}\cdot\text{时间}},$$

其单位在国际单位制中是 帕 · 秒 (Pa·s):

$$1\mathrm{Pa\cdot s} = 1\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\cdot s}},$$

而 $1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m}^2$. 通常取 毫帕 · 秒 (mPa·s) 为单位:

$$1\mathrm{mPa\cdot s} = 10^{-3}\mathrm{Pa\cdot s},$$

它相当于水在 20.5°C 时的粘性系数值.

流体的粘性系数是和温度有关的. 例如水的粘性系数随着温度的升高而下降, 见下表.

水的粘性系数随温度的变化情况

| 温度 / °C | $\mu$ / mPa·s | 温度 / °C | $\mu$ / mPa·s |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.792 | 40 | 0.656 |
| 5 | 1.519 | 45 | 0.599 |
| 10 | 1.308 | 50 | 0.549 |
| 15 | 1.140 | 60 | 0.469 |
| 20 | 1.005 | 70 | 0.406 |
| 25 | 0.894 | 80 | 0.357 |
| 30 | 0.801 | 90 | 0.317 |
| 35 | 0.723 | 100 | 0.284 |

而空气的粘性系数则与此相反, 随温度升高, 它反而增大, 见下表.

空气的粘性系数随温度的变化情况

| 温度 / °C | $\mu$ / $10^{-2}$mPa·s | 温度 / °C | $\mu$ / $10^{-2}$mPa·s |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.709 | 260 | 2.806 |
| 20 | 1.808 | 280 | 2.877 |
| 40 | 1.904 | 300 | 2.946 |
| 60 | 1.997 | 320 | 3.014 |
| 80 | 2.088 | 340 | 3.080 |
| 100 | 2.175 | 360 | 3.146 |
| 120 | 2.260 | 380 | 3.212 |
| 140 | 2.344 | 400 | 3.277 |
| 160 | 2.425 | 420 | 3.340 |
| 180 | 2.505 | 440 | 3.402 |
| 200 | 2.582 | 460 | 3.463 |
| 220 | 2.658 | 480 | 3.523 |
| 240 | 2.733 | 500 | 3.583 |

有的液体粘性很大, 如甘油, 在 3°C 时 $\mu = 4.220\text{Pa}\cdot\text{s}$; 机油, 在 10°C 时 $\mu = 0.6755\text{Pa}\cdot\text{s}$. 有的液体, 其粘性随着温度增高而很快下降, 如甘油, 其粘性系数随温度的变化情况如下:

| 温度 / °C | 3 | 18 | 21 |
|---|---|---|---|
| $\mu$ / Pa·s | 4.220 | 1.069 | 0.778 |

在寒冷的地区，机油因冷却而粘性加大，失去效用，常用加温的方法减低其粘性.

粘性系数和温度的关系，对气体来说，常可用如下的幂函数来表达：

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \tag{2.2}$$

其中 $n$ 随气体不同而不同，且有时还和温度有微弱的依赖关系. 例如，空气的 $n \approx 0.72$, 氦气 $n \approx 0.64$, 氢气 $n \approx 0.69$, 二氧化碳 $n \approx 0.95$. 在近似计算中，对比较高温的气体，有时用 $n = 0.5$; 而对低温情形，用 $n = 1$.

现再看热传导性. 这在数理方程课程中已有讨论，已知可用 傅里叶 (Fourier) 实验定律 来刻画：在单位时间内沿法线方向 $\boldsymbol{n}$ 通过曲面微元 $\mathrm{d}S$ 的热量

$$\mathrm{d}q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \mathrm{d}S, \tag{2.3}$$

其中负号表示热流方向是由高温流向低温. (2.3) 式表明热流量和温度梯度成正比 (这也是一个线性关系 !), 而比例系数 $\kappa$ 称为 导热系数. 导热系数决定于所考察的流体，并可与温度有关. 可将 (2.3) 式改写为

$$\mathrm{d}q = -\kappa \,\mathrm{grad}\, T \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S, \tag{2.4}$$

其中 $-\kappa \,\mathrm{grad}\, T$ 称为 热量流密度向量.

下面我们要着重将描述粘性的牛顿法则推广到流体作任意运动的一般情况.

### 2.2. 应力张量

为将前面在简单运动情况所提出的牛顿法则，推广到任意运动的一般情况，为建立粘性流体力学方程组作准备，下面先介绍应力张量的概念.

现在回到 §1 中建立动量守恒方程组的过程. 在理想流体的情形，表面力的冲量项

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathrm{div}\,(p\boldsymbol{I}) \mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

是由外界流体的压力产生的. 这里及今后，记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 而 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$. 在有粘性的情形，外界流体对 $\Omega$ 的作用力，不仅

有表面上的压力 (正应力), 而且有表面上的内摩擦力 (切应力), 它们的联合作用给出相应的表面力冲量. 因此, 动量守恒方程组的一般形式还应保持, 但二阶张量 $p\boldsymbol{I}$ 应改为考虑到粘性在内的应力张量 $\{p_{ij}\}$.

对流场中一点 $M$ 处的一面积元素 $\Delta S$ , 设其法线方向为 $\boldsymbol{n}$, 又设 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流体作用在 $\Delta S$ 上的面力为 $\Delta\boldsymbol{p}$ , 则

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta S} \tag{2.5}$$

为 $M$ 点处以 $\boldsymbol{n}$ 为法线方向的单位面积上受到的面力, 称为 *应力向量*. 因为过这一点 $M$ 有无穷多个方向, 相应的应力向量一般也不相同. 要描述一点的应力状态就需要知道过该点所有面上所受的应力. 但是同一点对不同方向的应力向量不是互不相关的. 事实上, 只要知道作用在与三个坐标面平行的面上的应力向量就够了. 记 $p_{ij}$ 为以 $x_j$ 的正向为法线方向的面积元素上的应力向量的第 $i$ 个分量, 那么 $\{p_{ij}\}$ 就称为 *应力张量*.

下面说明以上定义的 $\{p_{ij}\}$ 是二阶张量. 为此我们证明: 若一面积微元 $\mathrm{d}S$, 其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则其上的应力向量 (即 $\boldsymbol{n}$ 指向的一侧作用在 $\mathrm{d}S$ 的单位面积上的力) 为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}, \tag{2.6}$$

其中 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 按普通意义下的乘法, 即是分量为 $\sum\limits_{j=1}^{3}p_{ij}n_j$ $(i=1,2,3)$ 的向量, 而 $n_j$ $(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的分量. 利用张量识别定理 (见附录一), 由 (2.6) 式即知 $\boldsymbol{P}$ 为二阶张量.

现证明 (2.6) 式. 不妨设所讨论的点为原点 $O$. 考察图 1 所示的四面体微元上力的平衡. 此四面体受体积力 (包括外力及惯性力) 以及表面力的作用. 当四面体的棱长趋于零时, 体积力为棱长的三阶无穷小量; 而面力则为二阶无穷小量. 设平面 $ABC$ 的单位外法线向量为 $\boldsymbol{n}(n_1,n_2,n_3)$, 则显然

$$\begin{aligned}
&\Delta OBC\text{的面积} = n_1\cdot\Delta ABC\text{的面积},\\
&\Delta OAC\text{的面积} = n_2\cdot\Delta ABC\text{的面积},\\
&\Delta OAB\text{的面积} = n_3\cdot\Delta ABC\text{的面积}.
\end{aligned}$$

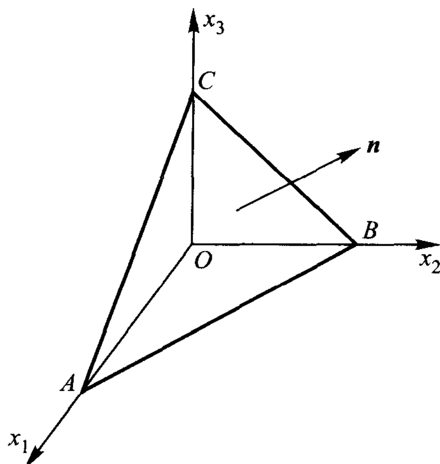



图 1

此外，由 $p_{ij}$ 的定义，有

$$
\begin{aligned}
\Delta OBC\text{所受的面力} &= -(p_{11},p_{21},p_{31})\cdot \Delta OBC\text{的面积} \\
&= -n_1(p_{11},p_{21},p_{31})\cdot \Delta ABC\text{的面积}, \\
\Delta OAC\text{所受的面力} &= -(p_{12},p_{22},p_{32})\cdot \Delta OAC\text{的面积} \\
&= -n_2(p_{12},p_{22},p_{32})\cdot \Delta ABC\text{的面积}, \\
\Delta OAB\text{所受的面力} &= -(p_{13},p_{23},p_{33})\cdot \Delta OAB\text{的面积} \\
&= -n_3(p_{13},p_{23},p_{33})\cdot \Delta ABC\text{的面积}.
\end{aligned}
$$

设平面 $ABC$ 上的应力向量为 $\boldsymbol{p}_n$，则由四面体上力的平衡条件得

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{p}_n - n_1(p_{11},p_{21},p_{31}) - n_2(p_{12},p_{22},p_{32}) \\
&\quad -n_3(p_{13},p_{23},p_{33}))\cdot \Delta ABC\text{的面积} \\
&\quad +\text{四面体所受的体积力} \\
&= 0. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

将上式两端除以 $\Delta ABC$ 的面积，然后令 $OA$, $OB$ 及 $OC$ 在保持 $\boldsymbol{n}$ 不变的条件下趋向于零，由 (2.7) 式立即给出 (2.6) 式.

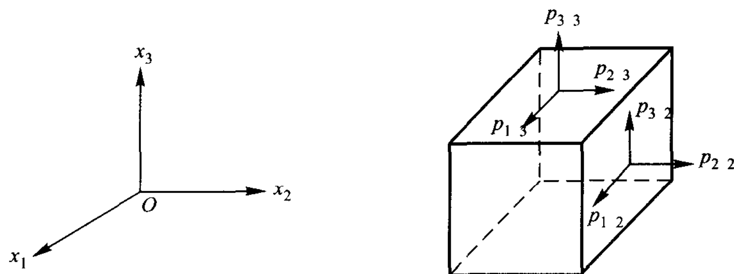



图 2

下面我们证明 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 是对称张量，即成立

$$p_{ij}=p_{ji}\quad(i,j=1,2,3). \tag{2.8}$$

考察图 2 所示的立方体微元，设其边长分别为 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$ 及 $\mathrm{d}x_3$. 现考察作用在该立方体上的力对其中心 (设为 $O$ 点) 的力矩. 由平衡条件，它应为零. 与前面一样，由于体积力形成的力矩为高阶无穷小量，可以略去. 此外，表面上应力的法向分量通过此立方体的中心，对力矩的贡献为零. 于是，考察力矩在 $x_1$ 方向的分量易得

$$p_{32}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\cdot\mathrm{d}x_2-p_{23}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdot\mathrm{d}x_3=0,$$

即

$$p_{32}=p_{23}.$$

同理可证 $p_{13}=p_{31}$ 及 $p_{12}=p_{21}$.

### 2.3. 广义牛顿法则 —— 本构方程

现在的问题是如何根据粘性流的特点具体地表示出这个二阶张量 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$, 从而给出所要求的广义牛顿法则. 为此，将 $\boldsymbol{P}$ 写为如下形式：

$$\{p_{ij}\}=-p\{\delta_{ij}\}+\{\tau_{ij}\}. \tag{2.9}$$

这里 $\{\tau_{ij}\}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 中对应于摩擦应力的部分，应着重予以讨论.

首先，容易看到，由于内摩擦力本质上由流体各层之间的相对运动而产生，在整个流体上加一个平移运动时，粘性应力不应该改变．因此，$\{\tau_{ij}\}$ 应和流体速度无关，而只是速度分量的偏导数的函数．当速度梯度不大时，可认为 $\tau_{ij}$ 仅为速度分量的一阶偏导数的函数，且为线性的．这一事实已为实验很好地证实．这样，以下我们假定 $\tau_{ij}$ 是速度梯度 $\left\{\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right\}$ 的线性齐次函数:

$$\tau_{ij}=\sum_{k,l=1}^{3}c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \tag{2.10}$$

其中 $c_{ijkl}$ 是表征流体粘性的常数，共有 $3^4=81$ 个．因为 $\left\{\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right\}$ 及 $\{\tau_{ij}\}$ 均为二阶张量，由张量识别定理 (见附录一)，$\{c_{ijkl}\}$ 是四阶张量．因为 $\{p_{ij}\}$ 为对称张量，故 $\{\tau_{ij}\}$ 亦然，这样就有

$$c_{ijkl}=c_{jikl}. \tag{2.11}$$

假设流体是各向同性的，这意味着 $\{c_{ijkl}\}$ 是各向同性的四阶张量．由四阶各向同性张量的一般形式 (见附录一)，有

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\alpha\delta_{ik}\delta_{jl}+\beta\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{2.12}$$

令 $\alpha=\mu+\nu$, $\beta=\mu-\nu$, 有

$$\begin{aligned}c_{ijkl}&=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\nu(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}),\\ c_{jikl}&=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{jk}\delta_{il}+\delta_{jl}\delta_{ik})+\nu(\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{jl}\delta_{ik}).\end{aligned}$$

注意到 (2.11) 式，由此易得

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{2.13}$$

由上式还可以看出，$\{c_{ijkl}\}$ 关于下标 $k$ 及 $l$ 亦是对称的，即

$$c_{ijkl}=c_{ijlk}. \tag{2.14}$$

这样，为决定 $\{c_{ijkl}\}$, 只需决定 $\lambda$ 及 $\mu$. 将 (2.13) 代入 (2.10) 式，就有

$$\tau_{ij}=\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{u}\delta_{ij}+2\mu s_{ij}, \tag{2.15}$$

其中

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.16}$$

由 (2.9) 与 (2.15) 式，即得应力张量的表达式

$$p_{ij} = (-p + \lambda \mathrm{div}\, \boldsymbol{u})\delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \tag{2.17}$$

或

$$\boldsymbol{P} = (-p + \lambda \mathrm{div}\, \boldsymbol{u})\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{S}, \tag{2.18}$$

这里 $\boldsymbol{S} = \{s_{ij}\}$.

下面说明上式中 $\lambda$ 及 $\mu$ 的意义.

首先考察沿 $x_1$ 方向的剪切运动:

$$u_1 = u_1(x_3), u_2 = u_3 = 0.$$

由 (2.17) 式，对于这一运动有

$$p_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

这与第一段中由牛顿法则给出的形式 (2.1) 完全一致. $\mu$ 称为*第一粘性系数*或*动力学粘性系数*.

由 (2.15) 可得

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \tau_{ii} = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}.$$

上式左端为由粘性而引起的平均摩擦正应力，而 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}$ 则表示体积变化率 (即单位时间内单位体积的变化量). 事实上，由连续性方程 (1.10) 不难得到

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t},$$

其中 $\tau = \dfrac{1}{\rho}$ 为比容，而 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 由 (1.17) 式定义. 这样，若记

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \tag{2.19}$$

则 $\mu'$ 作为平均摩擦正应力与体积变化率之比，描述流体运动过程中由膨胀或收缩而引起的平均摩擦正应力的变化. $\mu'$ 称为第二粘性系数或膨胀粘性系数. 对于单原子气体，在压力不是特别高的条件下，可认为 $\mu'=0$. 对于像空气这样的双原子气体，在温度不太高时，也可认为 $\mu'=0$. 但在一般的情况下，必须考虑 $\mu'$ 的影响.

利用 $\mu'$ 的定义 (2.19), (2.17) 式可写为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(s_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\delta_{ij}) + \mu'\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\delta_{ij}. \tag{2.20}$$

从而，摩擦应力张量为

$$\tau_{ij} = 2\mu(s_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\delta_{ij}) + \mu'\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\delta_{ij}. \tag{2.21}$$

这就是广义牛顿法则，其中 $\mu > 0$, $\mu' \geqslant 0$. (2.20) 亦称为流体的本构方程.

## 2.4. 粘性热传导流体动力学方程组

现在考察具有粘性及热传导的流体的动力学方程组. 质量守恒定律仍具有原有的形式 (见 (1.10) 式):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{u}) = 0. \tag{2.22}$$

在动量守恒定律中，代替原先的压力张量 $-p\boldsymbol{I}$, 现采用应力张量 $\boldsymbol{P} = \{p_{ij}\}$. 类似于 (1.13) 式，应有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}) = \rho \boldsymbol{F}, \tag{2.23}$$

其中

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\delta_{ij}\right) + \mu'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\delta_{ij}. \tag{2.24}$$

利用连续性方程 (2.22), 动量方程 (2.23) 可改写为

$$\begin{aligned} &\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}((\mu' - \frac{2}{3}\mu)\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) \\ &-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\right) = \rho F_i \quad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{2.25}$$

或写为向量形式

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{grad}\,p-\mathrm{grad}\,((\mu'-\frac{2}{3}\mu)\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})-2\mathrm{div}\,(\mu\boldsymbol{S})=\rho\boldsymbol{F},\quad(2.26)$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意义见 (1.17) 式，而 $\mu$ 及 $\mu'$ 均可以是温度 $T$ 的函数. (2.25) 或 (2.26) 也称为欧拉方程.

在能量守恒定律中，代替原先压力张量作的功，现采用应力张量作的功. 由 (2.6) 式，在时间区间 $[t_1,t_2]$ 中，应力张量对 $\Omega$ 中流体所作的功为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{Pn})\mathrm{d}S\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\mathrm{div}\,(\boldsymbol{Pu})\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 $\Gamma$ 为 $\Omega$ 的边界. 这样，在理想流体情形的方程 (1.19) 中的 $-\mathrm{div}\,(p\boldsymbol{u})$ 项应改为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,(\boldsymbol{Pu})&=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{ij}u_j)\\&=-\mathrm{div}\,(p\boldsymbol{u})+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})u_j\\&\quad+(\mu'-\frac{2}{3}\mu)u_i\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}).\end{aligned}\quad(2.27)$$

除此之外，考虑到热传导性，在时间区间 $[t_1,t_2]$ 中，$\Omega$ 内流体能量的增加还必须包含在这段时间内经过界面 $\Gamma$ 流入 $\Omega$ 中的热量所折合的功 (或能). 由傅里叶定律 (2.4), 这一项的贡献应为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\kappa\mathrm{grad}\,T\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\mathrm{div}\,(\kappa\,\mathrm{grad}\,T)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\quad(2.28)$$

这样，能量守恒律方程的形式为 (参见 (1.19))

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\mathrm{div}\,((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{Pu})\\=\;&\mathrm{div}\,(\kappa\,\mathrm{grad}\,T)+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u},\end{aligned}\quad(2.29)$$

即

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\operatorname{div}((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)\boldsymbol{u})\\
&-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_j+(\mu'-\frac{2}{3}\mu)u_i\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\\
=&\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}.
\end{aligned}\tag{2.30}
$$

利用连续性方程 (2.22), 上式可改写为

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\operatorname{div}(p\boldsymbol{u})\\
&-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_j+(\mu'-\frac{2}{3}\mu)u_i\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\\
=&\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u},
\end{aligned}\tag{2.31}
$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意义见 (1.17) 式.

注意到 $\operatorname{div}(p\boldsymbol{u})=p\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}p$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$, 并利用欧拉方程 (2.25), 方程 (2.31) 又可化为

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\mu\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\\
&-(\mu'-\frac{2}{3}\mu)(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2=\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T).
\end{aligned}\tag{2.32}
$$

和理想流体力学方程组的情形一样, 还要配上适当的状态方程, 例如 $p=p(\rho,T)$, $e=e(\rho,T)$ 以及 $\mu$, $\mu'$ 对 $T$ 的依赖关系式. 这样, (2.22) 、 (2.23) 和 (2.29), 或者 (2.22) 、 (2.25) 和 (2.32) 诸式就构成包含五个未知函数的封闭的偏微分方程组.

## 2.5. 粘性热传导流体动力学方程组的数学结构

现在我们说明, 粘性热传导流体动力学方程组可写为拟线性的对称双曲 – 抛物耦合方程组的形式, 其意义下文说明.

质量守恒方程 (2.22) 可写为如下形式:

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=f_0(\rho,\operatorname{grad}\boldsymbol{u}),\tag{2.33}
$$

其中

$$f_0(\rho, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}) = -\rho \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}. \tag{2.34}$$

动量守恒方程 (2.25) 可写为

$$\begin{aligned} & \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu\Delta u_i - (\mu' + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}) \\ = \ & \rho F_i + \widetilde{f}_i(\rho, T, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, \rho, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, T) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{2.35}$$

其中

$$\begin{aligned} & \widetilde{f}_i(\rho, T, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, \rho, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, T) \\ = \ & -c^2\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho\sum_{k=1}^{3} u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ & + \sum_{j=1}^{3}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}T}\frac{\partial T}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ & + \frac{\mathrm{d}(\mu' - \frac{2}{3}\mu)}{\mathrm{d}T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{2.36}$$

而 $c^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$. 写成分量形式，即为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\left((\mu' + \frac{4}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) \\ & -\frac{1}{\rho}(\mu' + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{\rho}(\mu' + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ = \ & F_1 + f_1(\rho, T, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, \rho, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, T), \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{\rho}(\mu' + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & -\frac{1}{\rho}\left(\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\mu' + \frac{4}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right) \\ & -\frac{1}{\rho}(\mu' + \frac{1}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ = \ & F_2 + f_2(\rho, T, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, \rho, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}, \mathrm{grad}\, T), \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_3}{\partial t}-\frac{1}{\rho}(\mu'+\frac{1}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{1}{\rho}(\mu'+\frac{1}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}\\&-\frac{1}{\rho}\left(\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+(\mu'+\frac{4}{3}\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)\\=\;&F_3+f_3(\rho,T,\boldsymbol{u},\operatorname{grad}\rho,\operatorname{grad}\boldsymbol{u},\operatorname{grad}T),\end{aligned}\tag{2.39}$$

其中 $f_i=\dfrac{\widetilde{f}_i}{\rho}$ $(i=1,2,3)$, 而 $\operatorname{grad}\boldsymbol{u}$ 表示二阶张量 $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$.

最后，看能量守恒方程 (2.32). 由状态方程 $e=e(\rho,T)$ (特别，对理想气体有 $e=e(T)$), 并利用连续性方程 (2.22), 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial e}{\partial\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial e}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{\partial e}{\partial\rho}\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\frac{\partial e}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

将其代入 (2.32) 式，即得

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial T}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}}\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)=\widetilde{f}(\rho,T,\operatorname{grad}\boldsymbol{u}),\tag{2.40}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\rho,T,\operatorname{grad}\boldsymbol{u})=&\left\{\left(\rho\frac{\partial e}{\partial\rho}-\frac{p}{\rho}\right)\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right.\\&+\frac{\mu}{\rho}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\\&\left.+\frac{1}{\rho}(\mu'-\frac{2}{3}\mu)(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2\right\}\Big/\frac{\partial e}{\partial T}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

(2.40) 式还可写为

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\kappa}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}}\Delta T=f_4(\rho,T,\boldsymbol{u},\operatorname{grad}\boldsymbol{u},\operatorname{grad}T),\tag{2.42}$$

其中

$$\begin{aligned}&f_4(\rho,T,\boldsymbol{u},\operatorname{grad}\boldsymbol{u},\operatorname{grad}T)=\widetilde{f}(\rho,T,\operatorname{grad}\boldsymbol{u})\\&-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial T}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}}\operatorname{grad}k\cdot\operatorname{grad}T,\end{aligned}\tag{2.43}$$

且 $\dfrac{\partial e}{\partial T} > 0$.

在上面五个方程 (2.33) 、 (2.37)—(2.39) 及 (2.42) 所构成的方程组中，质量守恒方程 (2.33) 是一个一阶偏微分方程. 将其视为关于 $\rho$ 的方程，是对称双曲型方程组的特例，因而是一个一阶双曲型方程，但其系数与右端还与 $\boldsymbol{u}$ 有关.

现考察后面的四个方程. 令 $U=(u_1,u_2,u_3,T)^{\mathrm{T}}$, 则方程 (2.37)—(2.39) 及 (2.42) 的左端只包含 $U$ 对 $t$ 的一阶偏导数及对 $x$ 的二阶偏导数. 这四个方程组成的方程组，可以写为如下的矩阵形式：

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{3}B_{ij}(\rho,U)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j}=C(\rho,\operatorname{grad}\rho,U,\operatorname{grad}U),\quad (2.44)$$

其中

$$B_{11}=\begin{pmatrix}\frac{\mu'+\frac{4}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}}\end{pmatrix},$$

$$B_{22}=\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mu'+\frac{4}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}}\end{pmatrix},$$

$$B_{33}=\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\mu'+\frac{4}{3}\mu}{\rho} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}}\end{pmatrix},$$

$$B_{12}=B_{21}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0\\ \frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$B_{23}=B_{32} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{13}=B_{31} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它们均为对称阵. 此外, 对任何给定的 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{\xi}|=1$,

$$\sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}\xi_i\xi_j$$

均为正定阵. 事实上,

$$\sum_{i,j=1} B_{ij}\xi_i\xi_j = \begin{pmatrix} a\xi_1^2+b & a\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_3 & 0 \\ a\xi_1\xi_2 & a\xi_2^2+b & a\xi_2\xi_3 & 0 \\ a\xi_1\xi_3 & a\xi_2\xi_3 & a\xi_3^2+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho\frac{\partial e}{\partial T}} \end{pmatrix},$$

其中

$$a=\frac{\mu'+\frac{1}{3}\mu}{\rho}, \quad b=\frac{\mu}{\rho}.$$

由于 $\mu>0$, $\mu'\geqslant 0$, 在 $\rho>0$ (不出现真空) 时, $a$ 及 $b$ 均为正数. 因而上述矩阵的主子式

$$a\xi_1^2+b>0,$$

$$\begin{vmatrix} a\xi_1^2+b & a\xi_1\xi_2 \\ a\xi_1\xi_2 & a\xi_2^2+b \end{vmatrix} = ab(\xi_1^2+\xi_2^2)+b^2>0,$$

$$\begin{vmatrix} a\xi_1^2+b & a\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_3 \\ a\xi_1\xi_2 & a\xi_2^2+b & a\xi_2\xi_3 \\ a\xi_1\xi_3 & a\xi_2\xi_3 & a\xi_3^2+b \end{vmatrix} = ab^2>0.$$

因此此矩阵为正定阵.

此时，我们称方程组 (2.44) 为对称抛物型的.

一般地说，一个方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j}=C,$$

其中 $U=(u_1,\cdots,u_m)^T$, $B_{ij}$ 为 $m\times m$ 阵，若满足

$1^\circ$ $B_{ij}$ $(i=1,\cdots,n)$ 为对称阵;

$2^\circ$ 对任意给定的 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $|\boldsymbol{\xi}|=1$,

$$\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}\xi_i\xi_j \text{均为对称正定阵},$$

则称该方程组属于彼得罗夫斯基 (I. G. Petrovsky) 意义下的对称抛物型方程组.

这样，粘性流体力学方程组的后面四个方程以 $(u_1,u_2,u_3,T)$ 为未知函数构成二阶对称抛物组，而其第一个方程以 $\rho$ 为未知函数为一个一阶对称双曲型方程，它们之间又互相耦合在一起，构成一个拟线性对称双曲－抛物耦合方程组. 这就是这一方程组的数学结构.

通常对这类方程组可以提出柯西问题，即给定初始状态

$$\begin{aligned}t=0:\ &(\rho,u_1,u_2,u_3,T)\\&=(\rho^0(\boldsymbol{x}),u_1^0(\boldsymbol{x}),u_2^0(\boldsymbol{x}),u_3^0(\boldsymbol{x}),T^0(\boldsymbol{x})),\end{aligned}\tag{2.45}$$

要求以后 (即 $t>0$ 时) 的状态. 在初值适当光滑时，这个问题的经典解在局部时间范围 $0\leqslant t\leqslant\delta$ $(\delta>0)$ 中的存在唯一性，利用能量积分及叠代方法是容易证明的. 这种解称为局部经典解. 和没有粘性及热传导的理想流体情形不同，在现在的情况，力学上不会发生激波型的间断. 但对任意给定的光滑初值，是否存在整体经典解 (即对一切时间 $t\geqslant 0$ 存在的经典解) 还是未能完全解决的问题. 目前已能证明的是，如果初值充分小，那么该初值问题一定存在整体经典解 (例如，见 [12]). 这也是近年来的一个比较重要的研究成果.

除初始条件外，有时还可能有边界条件. 在研究粘性流体的绕流问题时，在绕流物体表面 $\Gamma$ 上，不仅流体的法向分速度应为零 (因流体不渗入)，而且由于粘性，流体的切向分速度也为零，故速度边界条件为

$$\boldsymbol{u}|_\Gamma=\boldsymbol{0}.\tag{2.46}$$

而对温度 $T$ 的边界条件，则可采用通常的三类边界条件之一 (即在边界 $\Gamma$ 上给定 $T$, $\frac{\partial T}{\partial n}$ 或 $\frac{\partial T}{\partial n}+\alpha T$ $(\alpha>0)$ 这三者之一，其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\Gamma$ 上的单位外法线向量). 此时，对未知函数 $\rho$ 不需要任何边界条件.

## 2.6. 一维粘性热传导流体动力学方程组

现在考虑一个重要的特殊情况 —— 一维运动的情形. 此时假设流动在一圆柱形管道内进行，该管道的轴为 $x=x_1$ 轴，运动速度只有 $x$ 方向的分量，且在垂直于 $x$ 轴的任一截面上状态量均相同，即状态量只与 $t$ 及 $x$ 有关. 因此在 §2.4 中所述的方程组中，应略去一切对 $x_2$ 及 $x_3$ 的偏导数，且 $u_2=u_3=0$, 外力亦只有 $x=x_1$ 方向的分量. 于是，相应于 (2.22) 、 (2.23) 与 (2.29) 的方程组此时为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2+p-(\frac{4}{3}\mu+\mu')\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho F, \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial x}\left((\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u\right.\\&\qquad\left.-(\frac{4}{3}\mu+\mu')u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\rho F u.\end{aligned} \tag{2.49}$$

或同样地相应于 (2.22) 、 (2.25) 与 (2.32), 我们有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{4}{3}\mu+\mu')\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F, \tag{2.51}$$

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u\frac{\partial e}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial x}-(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{2.52}$$

其中最后一式又可写为

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial e}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\rho^2\frac{\partial e}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial x}\\&\qquad-(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{2.53}$$

这儿，第一个方程 (2.50) 对未知函数 $\rho$ 仍为一阶双曲型方程，后两个方程 (2.51) 及 (2.52) 对未知函数 $u$ 与 $T$ 为二阶抛物组，上述方程组仍为拟线性双曲 – 抛物耦合方程组．对此方程可提柯西问题：

$$t=0:(\rho,u,T)=(\rho^0(x),u^0(x),T^0(x)), \tag{2.54}$$

或再加上下述边界条件的初 – 边值问题：

$$x=0:u=0,T\text{满足通常的三类边界条件之一},$$
$$x=1:\text{类似的边界条件}.$$

这里我们假定所讨论的流体界于 $x=0$ 与 $x=1$ 之间．对上述问题，$\rho$ 不需给定边界条件．

这些问题的局部可解性已彻底解决，但其整体可解性仍是目前研究的课题．

## §3. 纳维 – 斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组

现在我们考察不可压缩的粘性流体的运动．这是一种很有实际意义的情况．典型的不可压缩流体是常温常压下的水．由于其密度几乎不随压力、温度而改变，因而可近似地视为不可压缩的．对不可压缩流体，其状态方程为密度 $\rho\equiv$ 常数．不妨设

$$\rho\equiv 1. \tag{3.1}$$

对于这种流体的运动，由于 (3.1) 式，质量守恒方程 (2.22) 化为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \tag{3.2}$$

由 (3.2) 式，此时在本构方程 (2.20) 中，因而在流体力学方程组中不出现 $\mu'$．此外，可设 $\mu$ 为常数．这样，注意到 (3.1)—(3.2) 式，欧拉方程 (2.26) 可化为

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}-\mu\Delta\boldsymbol{u}+\operatorname{grad}p=\boldsymbol{F}, \tag{3.3}$$

其中 $p$ 是 $t$ 及 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的函数．需要指出的是，即使在常温下，也不能由状态方程推得 $p$ 为常数．因为此时状态方程为 (3.1)，而

不再采取 $p=p(\rho,T)$ 的形式. 实际上, 不存在绝对不可压缩的流体. 所谓不可压缩性, 是对流体在压力 $p$ 及温度 $T$ 改变时, 密度 $\rho$ 的变化很小的这种现象的一种简化. 换一句话说, 对这种流体, 密度 $\rho$ 的微小变化即可引起压力 $p$ 等的显著改变. 因此如果将状态方程取为 (3.1) 的形式, 就必须将 $p$ 视为 $t$ 及 $\boldsymbol{x}$ 的函数.

对现在这种情况, 将方程 (3.2) 及 (3.3) 视为未知函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ 及 $p$ 的方程组已经是一个封闭的方程组. 这样, 我们得到不可压缩流体运动的基本方程组为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-\mu\Delta\boldsymbol{u}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k}+\operatorname{grad}p=\boldsymbol{F}, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \tag{3.5}$$

这个方程组通常称为纳维 - 斯托克斯方程组, 或更精确地称为三维纳维 - 斯托克斯方程组.

对纳维 - 斯托克斯方程组 (3.4)—(3.5), 通常考虑的定解问题是如下的柯西问题: 已知初始速度

$$t=0:\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^0(x_1,x_2,x_3), \tag{3.6}$$

决定以后时刻 $(t>0)$ 的流速 $\boldsymbol{u}(t,x_1,x_2,x_3)$ 及压强 $p(t_1,x_1,x_2,x_3)$. 这里自然假定初始速度 $\boldsymbol{u}^0$ 满足条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}^0=0$, 而 $p$ 的决定自然允许相差一个 $t$ 的任意函数 (与 $\boldsymbol{x}$ 无关).

除初值问题外, 对这个方程组也可以考虑初 - 边值问题, 即要求该方程组的解除满足初始条件 (3.6) 外, 还在流体所占区域 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 上满足一定的边界条件, 如

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma}=\boldsymbol{0}. \tag{3.7}$$

这个条件说明: 由于粘性, 流体的速度在壁面上应为零.

纳维 - 斯托克斯方程组 (3.4)—(3.5) 的形式虽然比一般的粘性流体力学方程组简单, 但仍是一个相当复杂的非线性方程组. 由于纳维 - 斯托克斯方程组不仅可以用来描述粘性流体 (如水) 的运动, 而且目前比较倾向的看法是可利用它来解释湍流发生的机制, 因而具有极大的重要性, 是无穷维动力系统的重要研究对象 (参见 [14]). 到现在为止, 关于其初 - 边值问题在三维情形的解的存在唯一性, 关于其整体

吸引子及惯性流形的存在性等基本问题尚有待进一步的研究，预期在今后相当一段长的时间内，无论在理论上还是在数值解法上，都将是非常热门的研究对象.

方程组 (3.4)—(3.5) 中 $p$ 这个未知函数和 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$ 这个方程，使该方程组从数学形式上看有一种不太自然的面貌. 求解该方程组最通常的办法，就是根据法国科学院院士勒雷 (J. Leray) 的开创性的工作 (见 [13])，选择合适的函数空间，将这些不自然的东西吸收到空间中去，使问题在数学上有一个“干干净净”的面貌. 例如，在 $L^2$ 空间考察上述初 - 边值问题 (3.4)—(3.7). 令 $H=(L^2(\Omega))^3$，可将 $H$ 进行正交分解. 在第一章引理 6.3 中，我们曾证明：任一向量场均可分解为纵场与横场的叠加. 实际上对上述分解得到的横场我们还可以提出更高的要求.

**引理 3.1.** *设 $\boldsymbol{u}$ 为 $\Omega$ 中适当光滑的向量场，那么 $\boldsymbol{u}$ 可唯一地表示为如下形式*

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}+\operatorname{grad}p, \tag{3.8}$$

*其中 $\boldsymbol{w}$ 满足*

$$\begin{cases}\operatorname{div}\boldsymbol{w}=0, & \text{在}\,\Omega\,\text{内},\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}=0, & \text{在}\,\Gamma\,\text{上},\end{cases} \tag{3.9}$$

*而 $\boldsymbol{n}$ 是 $\Gamma$ 上的单位外法线向量.*

**证明**. 首先注意，若 (3.9) 式成立，则 $\boldsymbol{w}$ 必与任何 $\operatorname{grad}p$ 在 $H$ 中正交. 事实上，利用格林公式，有

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\operatorname{grad}p\mathrm{d}x=\int_\Gamma(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})p\mathrm{d}S-\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{w})p\mathrm{d}x=0.$$

现证明分解式 (3.8) 的唯一性. 若存在 $\boldsymbol{w}_1$ 、$p_1$ 及 $\boldsymbol{w}_2$ 、$p_2$ 均使 (3.8) 式成立，那么

$$\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2+\operatorname{grad}(p_1-p_2)=\boldsymbol{0}.$$

将上式两端与 $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2$ 作数量积，并在 $\Omega$ 上积分得

$$\int_\Omega|\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2)\cdot\operatorname{grad}(p_1-p_2)\mathrm{d}x=0,$$

从而利用 $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2$ 与 $\operatorname{grad}(p_1-p_2)$ 在 $H$ 中的正交性，有

$$\|\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2\|_H=0,$$

即 $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_2$. 至于 $p$ 的确定，当然允许相差一个常数，但这不影响分解式 (3.8) 的结果.

考察如下的诺依曼 (Neumann) 问题:

$$\begin{cases} \Delta p = \operatorname{div} \boldsymbol{u}, & \text{在}\,\Omega\,\text{内}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}, & \text{在}\,\Gamma\,\text{上}. \end{cases}$$

因为

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x = \int_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

上述问题在相差一个任意常数的意义下，存在唯一解 (参见 [1]). 对这样求得的 $p$, 取 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}-\operatorname{grad}p$, 易知满足 (3.9) 式. 这就得到了所要求的分解式 (3.8). 引理证毕.

对一般的 $\boldsymbol{u}\in H$, 可以证明 (见 [5]), $\boldsymbol{u}$ 仍可唯一地表为 (3.8) 的形式，其中 $\boldsymbol{w}\in H_\sigma$,

$$H_\sigma = \left\{\boldsymbol{w}\mid \boldsymbol{w}\in H, \int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\operatorname{grad}\phi\mathrm{d}x = 0, \forall\phi\in H^1(\Omega)\right\},$$

而 $p\in H^1(\Omega)$, 这儿 $H^1(\Omega)$ 为通常意义下的索波列夫 (Sobolev) 空间. 这说明 $H$ 可分解为如下两空间的直和:

$$H = H_\sigma \oplus H_\sigma^\perp,$$

其中

$$H_\sigma^\perp = \{\boldsymbol{f}\mid \boldsymbol{f}=\operatorname{grad}p, p\in H^1(\Omega)\}.$$

显然， $H_\sigma$ 及 $H_\sigma^\perp$ 这两个 $H$ 中的子空间是互相正交的.

记 $P$ 为从 $H$ 到 $H_\sigma$ 中的投影算子:

$$P\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}, \quad \forall\boldsymbol{u}\in H,$$

其中 $\boldsymbol{w}\in H_\sigma$ 由 $\boldsymbol{u}$ 的分解式 (3.8) 给出. 将投影算子 $P$ 作用到方程组 (3.4) 的两边 (为简单计，不妨设 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$), 注意到 (3.5) 意味着 $\boldsymbol{u}\in H_\sigma$, 于是

$$P\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}, \quad P\operatorname{grad}p = \boldsymbol{0},$$

这样就有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = P\left(\mu\Delta\boldsymbol{u} - \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k}\right). \tag{3.10}$$

对方程组 (3.10) 连同初始条件 (3.6) 及边界条件 (3.7) 可用通常的伽辽金 (Galerkin) 方法或算子半群方法讨论其解的存在性.

如果只限于二维的流动，即设 $u_3 \equiv 0$, 而 $u_1$, $u_2$ 及 $p$ 又只与 $t$, $x_1$, $x_2$ 有关，就得到 二维纳维 - 斯托克斯方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \displaystyle\sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{F}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$. 对这个二维方程组的上述混合初 - 边值问题，已证明了其整体解的存在唯一性，其存在性与唯一性的空间是一致的. 但是对三维的情形，虽然已分别有存在性与唯一性的结果，但二者的空间还不能合拢，问题还没有得到完满的解决.

关于纳维 - 斯托克斯方程组已有好几本专著，有兴趣的读者例如可参阅 [5] 、 [15] 及 [16] 等.

## §4. 激　波

本节考察一维理想流体力学方程组 (1.87)—(1.89) 的强间断解，即激波. 为叙述简单计，设 $F = 0$.

### 4.1. 间断连接条件

微分形式的方程组 (1.87)—(1.89) 只对光滑区域中的解成立. 在解的间断线上，它们不再有效，但导出微分形式方程组的积分形式的守恒律 (1.9) 、 (1.11) 与 (1.18) (应化为一维形式 !) 仍然成立. 我们可以直接由这样的积分守恒律，导出分块光滑的解在其间断线上应满足的连接条件.

首先作一个一般性的考察.

任何一维的积分形式的守恒律，均可写为如下形式:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t_2, x)\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} f(t_1, x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} q(t,x_1)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} q(t,x_2)\mathrm{d}t,$$
$$\forall(x_1,x_2), \forall t_1 < t_2. \tag{4.1}$$

(4.1) 式又可与为

$$\oint_{\Gamma} f\mathrm{d}x - q\mathrm{d}t = 0, \tag{4.2}$$

其中 $\Gamma$ 为由图 3 给出的矩形回路. 由此不难推出, (4.2) 式对 $(t,x)$ 平面上的任一封闭曲线 $\Gamma$ 成立.

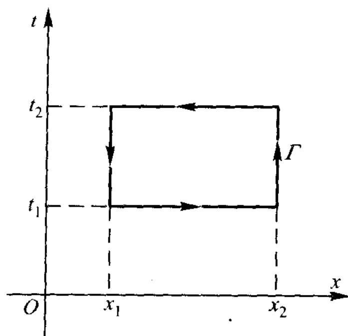



图 3

由格林公式知, 如果 $f$ 与 $q$ 光滑, 那么 (4.2) 式给出

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \tag{4.3}$$

其中 $\Omega$ 为 $\Gamma$ 所围的区域. 由 $\Omega$ 的任意性, 就得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{4.4}$$

这就是相应的微分形式的守恒律. 在 $f$ 及 $q$ 光滑的区域内, 它与 (4.1) 或 (4.2) 等价.

设 $x = x(t)$ 为一条间断线, $f$ 与 $q$ 在此曲线外连续, 在其上有第一类间断. 为了得到 $f$ 及 $q$ 在间断线上应满足的连接条件, 作如图 4 所示回路 $\Gamma$, 并在其上运用 (4.2) 式, 有

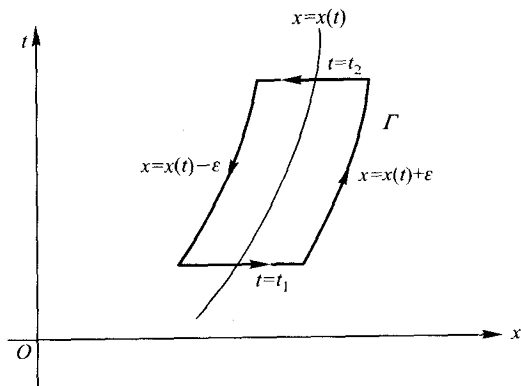



图 4

$$\int_{x(t_1)-\varepsilon}^{x(t_1)+\varepsilon} f(t_1,x)\mathrm{d}x - \int_{x(t_2)-\varepsilon}^{x(t_2)+\varepsilon} f(t_2,x)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(f(t,x(t)+\varepsilon)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - q(t,x(t)+\varepsilon)\right)\mathrm{d}t$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(f(t,x(t)-\varepsilon)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - q(t,x(t)-\varepsilon)\right)\mathrm{d}t = 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由上式得出

$$\int_{t_1}^{t_2}\left([f]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - [q]\right)\mathrm{d}t = 0, \quad \forall t_1 < t_2,$$

再注意到 $t_1$ 及 $t_2$ 的任意性，就得到在 $x = x(t)$ 上成立

$$[f]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - [q] = 0, \tag{4.5}$$

其中 $[f] = f_+ - f_-$ 为 $f$ 越过间断线 $x = x(t)$ 的跃度，而 $f_+ = f(t,x(t)+0)$, $f_- = f(t,x(t)-0)$, $[q]$ 的意义相同. 条件 (4.5) 称为间断连接条件. 它是和形如 (4.4) 的守恒律微分方程相匹配的.

将 (4.5) 式用于方程组 (1.87)—(1.89), 得

$$[\rho]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = [\rho u], \tag{4.6}$$

$$[\rho u]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=[\rho u^2+p], \tag{4.7}$$

$$[\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=[(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u]. \tag{4.8}$$

这些间断连接条件通称为 兰金 - 雨果尼奥 (Rankine–Hugoniot) 条件.

记 $U=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 为间断的传播速度，另外记

$$v_-=u_--U,\quad v_+=u_+-U,$$

(4.6)—(4.8) 可改写为

$$\rho_-v_-=\rho_+v_+, \tag{4.9}$$

$$\rho_-v_-^2+p_-=\rho_+v_+^2+p_+, \tag{4.10}$$

$$(\rho_-e_-+\frac{1}{2}\rho_-v_-^2+p_-)v_-=(\rho_+e_++\frac{1}{2}\rho_+v_+^2+p_+)v_+. \tag{4.11}$$

记 $m=\rho_-v_-=\rho_+v_+$.

若 $m=0$, 我们称间断线 $x=x(t)$ 为 接触间断. 对接触间断, $v_-=v_+=0$, 即 $u_+=u_-=U$, 所以该间断线随流体以同一速度运动，无流体越过间断线. 此时，由 (4.10), $p_-=p_+$, 但 $\rho_-\neq\rho_+$ (否则不出现间断).

若 $m\neq 0$, 我们称间断线 $x=x(t)$ 为 激波. 对于激波， $v_-\neq 0$, $v_+\neq 0$, 因而流体越过间断线. 我们用下标 “0” 表示流体越过间断前的状态, 用下标 “1” 表示流体越过激波后的状态. 由 (4.9)—(4.11) 有

$$\rho_0v_0=\rho_1v_1=m, \tag{4.12}$$

$$\rho_0v_0^2+p_0=\rho_1v_1^2+p_1, \tag{4.13}$$

$$(\rho_0e_0+\frac{1}{2}\rho_0v_0^2+p_0)v_0=(\rho_1e_1+\frac{1}{2}\rho_1v_1^2+p_1)v_1. \tag{4.14}$$

下面我们从 (4.12)—(4.14) 式中消去 $v_0$, $v_1$, 从而得到热力学量在越过激波时应满足的方程. 由 (4.12) 与 (4.13) 式有

$$m=-\frac{p_0-p_1}{v_0-v_1}. \tag{4.15}$$

由 $\tau=\dfrac{1}{\rho}$, 将 $v_0=m\tau_0$, $v_1=m\tau_1$ 代入上式得

$$m^2=-\frac{p_0-p_1}{\tau_0-\tau_1}. \tag{4.16}$$

注意 $m^2=\rho_0v_0\rho_1v_1$, 上式又可写为

$$v_0v_1=\frac{p_0-p_1}{\rho_0-\rho_1}. \tag{4.17}$$

利用 (4.12) 并注意到 $\tau=\dfrac{1}{\rho}$, 又可将 (4.14) 式改写为

$$(\rho_0e_0+\frac{1}{2}\rho_0v_0^2)\tau_0-(\rho_1e_1+\frac{1}{2}\rho_1v_1^2)\tau_1=p_1\tau_1-p_0\tau_0. \tag{4.18}$$

但

$$\begin{aligned}(4.18)\text{ 式左端}\ &=\ \frac{1}{2}(v_0-v_1)(v_0+v_1)+e_0-e_1\\ &=\ (e_0-e_1)-\frac{1}{2}(p_0-p_1)(\tau_0+\tau_1),\end{aligned}$$

其中最后一步，利用了 (4.12) 与 (4.15) 式. 这样， (4.18) 式就可改写为

$$e_1-e_0+\frac{1}{2}(p_0+p_1)(\tau_1-\tau_0)=0. \tag{4.19}$$

(4.19) 式称为激波上的 雨果尼奥方程 或 热力学激波条件. 它只依赖于热力学量 $\tau$ 与 $p$, 而与 $v$ (从而与 $u$) 无关.

若记

$$H(\tau,p;\tau_0,p_0)=e(\tau,p)-e(\tau_0,p_0)+\frac{1}{2}(p_0+p)(\tau-\tau_0), \tag{4.20}$$

并称其为 雨果尼奥函数, 那么雨果尼奥方程 (4.19) 可简单地写为

$$H(\tau_1,p_1;\tau_0,p_0)=0. \tag{4.21}$$

对多方气体，状态方程具有如下形式

$$e=\frac{1}{\gamma-1}p\tau. \tag{4.22}$$

这样，由 (4.20) 式，其雨果尼奥函数满足

$$2\mu^2 H(\tau, p; \tau_0, p_0) = (\tau - \mu^2\tau_0)p - (\tau_0 - \mu^2\tau)p_0, \tag{4.23}$$

其中 $\mu^2 = (\gamma-1)/(\gamma+1)$ . 上式说明,对多方气体,曲线 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 为一条过点 $(\tau_0, p_0)$ 的双曲线 (见图 5).

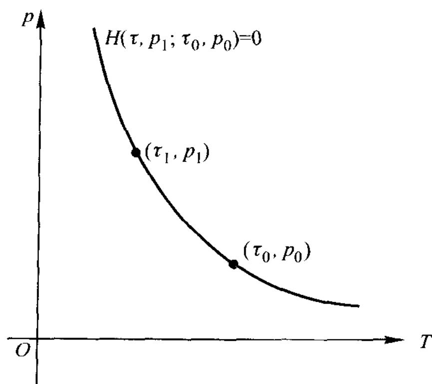



图 5

### 4.2. 熵条件

为了保证所建立的理论足以刻画包含激波的流场，必须考虑解的唯一性问题. 间断连接条件 (4.6)—(4.8) 能否保证一维理想流体力学方程组 (1.87)—(1.89) 定解问题 (如初值问题) 间断解 (或更一般地，弱解) 的唯一性呢？回答是否定的. 在下面例 4.1 中，我们将以一个简单的方程为例来说明这一点.

现在先从物理的角度考察这个问题. 方程 (1.87)—(1.89) 以及相应的间断连接条件 (4.6)—(4.8) 分别描述流体在流动过程中所满足的质量、动量及能量守恒定律. 能量守恒定律就是热力学第一定律. 但作为一个实际发生的流体流动过程，还必须满足判定一个热力学过程能否得以进行的热力学第二定律. 由 §1 知道，在光滑的流场中，理想流体的能量守恒定律与熵守恒定律等价. 越过激波，流体的熵是否仍守恒呢？让我们来看多方气体的情况. 若越过激波熵仍守恒，就应有

$$p_1\rho_1^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma} \quad 或 \quad p_1\tau_1^{\gamma} = p_0\tau_0^{\gamma}.$$

但一般，曲线 $p\tau^\gamma = p_0\tau_0^\gamma$ 与由 (4.23) 式给出的 $H(\tau, p; \tau_0, p_0)$ 所形成的雨果尼奥曲线 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 不重合，因而流体越过激波不是一个等熵过程. 对实际流体而言，所谓激波是指流体的压力、速度及密度等在一个狭小的范围内产生剧烈的变化. 由 §2 中对粘性流体的考察可以看出，此时即使粘性系数很小，粘性摩擦所产生的效应已不能再忽略，因而这相当于一个不可逆的过程，流体越过激波时熵应该增加 (参见附录二).

下面我们讨论如何在数学上方便地描述越过激波熵增加这一热力学条件. 先考察如下最简单的非线性守恒律方程.

**例 4.1.** 对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{4.24}$$

其间断连接条件 (4.5) 为

$$[u]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \left[\frac{u^2}{2}\right] = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u_- + u_+}{2}. \tag{4.25}$$

相应于如下的两个初始条件

$$u(0,x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

及

$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0, \\ 0, & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.27}$$

我们可以分别构造出方程 (4.24) 的两个满足间断连接条件 (4.25) 的间断解:

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \frac{1}{2}t, \\ 1, & x \geqslant \frac{1}{2}t \end{cases} \tag{4.28}$$

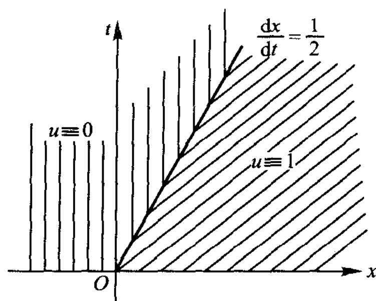



图 6

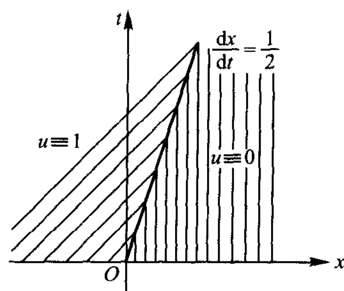



图 7

及

$$u(t,x)=\begin{cases}1, & x\leqslant\frac{1}{2}t,\\ 0, & x\geqslant\frac{1}{2}t.\end{cases}\tag{4.29}$$

对于解 (4.28), 其间断线 $x=\frac{1}{2}t$ 两侧的特征线 (由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u$ 定义) 均向上伸展, 即指向 $t$ 增加的方向 (见图 6); 而对于解 (4.29), 其间断线 $x=\frac{1}{2}t$ 两侧的特征线均向下伸展, 即指向 $t$ 减少的方向, 直至初始轴 $t=0$ (见图 7). 由于 (4.24) 的解沿特征线 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u$ 取常数值, 因而由 $t=0$ 时给定的初值 (4.27) 可沿特征线来决定 $t>0$ 时的解 (4.29), 而解 (4.28) 则不能利用初值 (4.26) 沿特征线来决定. 按因果性原则 (它本质上就是关于时间的不可逆性), 在 $t>0$ 时的解及激波应由初始数据确定, 而不应由“将来”确定. 这样, 我们有理由认为, 由 (4.29) 给出的解是合理的; 而由 (4.28) 给出的问题 (4.24) 与 (4.26) 的解, 不符合因果性原则, 应予摈弃. 事实上, 对初始条件 (4.26), 我们还可以构造出方程 (4.24) 的另一个解:

$$u(t,x)=\begin{cases}1, & x\geqslant t,\\ x/t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\tag{4.30}$$

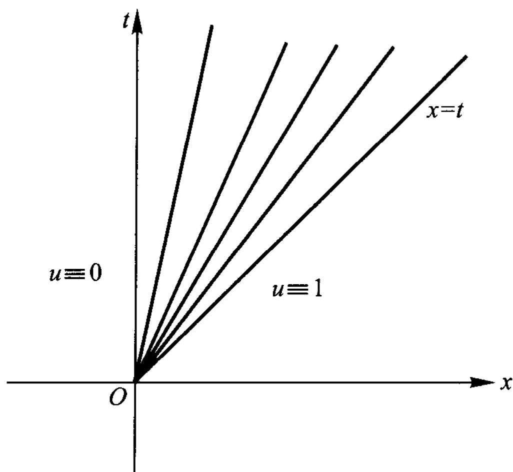



图 8

我们通常称它为中心疏散波 (参见图 8). 这样, 只有放弃由 (4.28) 式给出的解, 才有可能保证满足间断连接条件的间断解的唯一性.

基于以上讨论, 我们转而来考察一维气体动力学方程组 (1.87)—(1.89). 其特征方程的根为

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c. \tag{4.31}$$

相应于以上特征根的特征曲线, 则分别由以下三式确定:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - c, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = u + c. \tag{4.32}$$

作为越过激波熵增加条件在数学上的一种描述, 拉克斯 (P. D. Lax) 提出如下的激波不等式: 在激波间断的两侧, 对某个 $k \in \{1, 2, 3\}$, 成立

$$\lambda_k(u_+, c_+) < U < \lambda_k(u_-, c_-), \tag{4.33}$$

$$\lambda_{k-1}(u_-, c_-) < U < \lambda_{k+1}(u_+, c_+), \tag{4.34}$$

其中 $U$ 为激波传播的速度. 在 $k=1$ 时 (4.34) 式左面的不等式以及在 $k=3$ 时 (4.34) 式右面的不等式均是不需要的. 满足这组不等式的激波间断称为 $k$ - 激波. (4.33) 与 (4.34) 式有时亦称为*熵不等式*或*熵条件*.

对于激波, 由 (4.12) 式知 $v_0, v_1$ 同号. 若 $v_0, v_1$ 均为负, 说明流体由右向左越过激波, 也就是说激波相对于流体向右传播. 此时我们称激波为*右传播激波*. 类似地, 若 $v_0, v_1$ 均为正, 则称其为*左传播激波*.

现在我们说明, 对一维气体动力学方程组, 不存在 2 - 激波, 即不存在激波间断使 (4.33)—(4.34) 对 $k=2$ 成立. 事实上, 若激波为右传播的, 那么由 $v$ 的定义, 有

$$u_0, u_1 < U;$$

若激波为左传播的, 则

$$u_0, u_1 > U.$$

所以无论是哪种情况, (4.33) 均不可能对 $k=2$ 成立. 类似地, 容易证明, 不存在右传播的 1 - 激波与左传播的 3 - 激波. 这样, *对一维气体动力学方程组, 只可能有左传播的 1 - 激波及右传播的 3 - 激波.*

一激波称*压缩*的, 若流体越过激波后的压力大于其越过激波前的压力, 即

$$p_0 < p_1. \tag{4.35}$$

对于熵条件 (4.33)—(4.34) 与激波压缩性条件 (4.35), 我们有如下结果.

**定理 4.1.** *对多方气体, 一激波为压缩的充分必要条件为该激波满足熵条件 (4.33)—(4.34).*

**证明** 该定理的证明分以下几步来完成.

1° *气体在激波前后两侧相对于激波的传播速度 $v_0$ 及 $v_1$ 分别为超音速与亚音速的.*

事实上, 由 (4.12) 与 (4.14) 式有

$$\frac{1}{2}v_0^2 + e_0 + p_0\tau_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + e_1 + p_1\tau_1. \tag{4.36}$$

将 $\mu^2=(\gamma-1)/(\gamma+1)$, $e=p\tau/(\gamma-1)$ 以及 $c^2=\gamma p\tau$ 代入上式得

$$\mu^2v_0^2+(1-\mu^2)c_0^2=\mu^2v_1^2+(1-\mu^2)c_1^2. \tag{4.37}$$

以 $c_*^2$ 表上式两端的公共值，则

$$(1-\mu^2)(v_0^2-c_0^2)=v_0^2-c_*^2,$$
$$(1-\mu^2)(v_1^2-c_1^2)=v_1^2-c_*^2.$$

以上两式说明

$$|v_0|>c_0 \quad \text{等价于} \quad |v_0|>c_*, \tag{4.38}$$
$$|v_1|>c_1 \quad \text{等价于} \quad |v_1|>c_*. \tag{4.39}$$

由定义 $c_*^2$ 的 (4.37) 式右端, 并注意 $c_1^2=\gamma p_1\tau_1$ 及 $(1-\mu^2)\gamma=1+\mu^2$, 我们有

$$\rho_1c_*^2=\mu^2(\rho_1v_1^2+p_1)+p_1.$$

类似地，可得

$$\rho_0c_*^2=\mu^2(\rho_0v_0^2+p_0)+p_0.$$

将以上两式相减并利用 (4.13) 式，得

$$c_*^2=\frac{p_1-p_0}{\rho_1-\rho_0}. \tag{4.40}$$

将 (4.40) 式与 (4.17) 式相比较，有

$$c_*^2=v_0v_1. \tag{4.41}$$

(4.41) 式称为普朗特 (Prandtl) 关系式. 由普朗特关系式以及 (4.38) 与 (4.39) 式即得所需的结论.

$2^\circ$ 一激波为压缩的充要条件为

$$\rho_0<\rho_1. \tag{4.42}$$

这一结论由压缩激波的定义以及 (4.40) 式立即可得.

$3^\circ$ 非压缩激波不满足熵条件 (4.33)—(4.34).

由 2° 知,对非压缩激波 $\rho_1 < \rho_0$. 设激波为右传播的,即 $v_0, v_1 < 0$. 那么由前述讨论知,熵条件 (4.33)—(4.34) 不可能对 $k = 1, 2$ 成立. 下面我们证明, (4.33) 对 $k = 3$ 亦不可能成立. 不难直接验证,对由雨果尼奥方程 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 确定的函数 $p = p(\tau)$ 而言, $c = \sqrt{\gamma p(\tau)\tau}$ 为 $\tau$ 的严格减函数,从而 $c(\rho_1) < c(\rho_0)$. 此外,由 (4.12) 式必有 $v_1 < v_0 < 0$. 因此

$$v_1 + c(\rho_1) < v_0 + c(\rho_0).$$

但由 1° 知,此时必有

$$|v_1| > c(\rho_1), \qquad |v_0| < c(\rho_0).$$

这意味着

$$v_1 + c(\rho_1) < 0 < v_0 + c(\rho_0),$$

即

$$u_1 + c(\rho_1) < U < u_0 + c(\rho_0). \tag{4.43}$$

对右传播激波, "0" 是右状态 "+", "1" 是左状态 "−". 这样 (4.43) 与 $k = 3$ 时的不等式 (4.33) 矛盾. 对左传播激波可类似地讨论.

4° 压缩激波满足熵条件 (4.33)—(4.34).

由 2°, 对压缩激波 $\rho_1 > \rho_0$. 仍设激波为右传播的. 此时应有 $v_0 < v_1 < 0$, 而且 $c(\rho_1) > c(\rho_0)$. 这样

$$v_1 + c(\rho_1) > v_0 + c(\rho_0).$$

由 1° 知,此时必有

$$|v_0| > v(\rho_0), \qquad |v_1| < c(\rho_1).$$

这意味着

$$v_1 + c(\rho_1) > 0 > v_0 + c(\rho_0),$$

即

$$u_1 + c(\rho_1) > U > u_0 + c(\rho_0). \tag{4.44}$$

这正是 $k=3$ 时的不等式 (4.33). 因为激波是右传播的, 所以 $v_1<0$, 即 $u_1<U$, 这就是 $k=3$ 时的不等式 (4.34). 所以熵条件 (4.33)—(4.34) 成立. 对左传播激波可以类似地讨论. 定理 4.1 证毕.

熵条件 (4.33)—(4.34) 和物理熵之间的关系, 由下面的定理给出.

**定理 4.2.** *对多方气体, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 的充要条件为越过激波熵 $S$ 增加, 即*

$$S_1>S_0. \tag{4.45}$$

**证明**　由定理 4.1 知, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 的充要条件为

$$\tau_1<\tau_0. \tag{4.46}$$

所以, 由多方气体熵的表达式 (1.27) 知, 为证明 (4.45) 式, 只要证明对由雨果尼奥方程 $H(\tau,p;\tau_0,p_0)=0$ 确定的函数 $p=p(\tau)$, 函数 $p(\tau)\tau^\gamma$ 是 $\tau$ 的严格减函数. 对此, 类似于定理 4.1 的证明, 不难由 $H(\tau,p;\tau_0,p_0)$ 的表达式 (4.23) 直接验证. 定理 4.2 证毕.

对于多方气体, 定理 4.2 说明, 激波上满足的熵不等式 (4.33) — (4.34) 与气体越过激波时熵增加这一物理事实等价. 若讨论的范围不局限于多方气体, 可以证明, 这一结果对弱激波亦是成立的 (见 [4]). 所谓弱激波, 是指其强度、即物理量越过激波时的跃度充分小的激波.

最后, 为了进一步说明激波是一种压缩性的现象, 我们给出以下结果.

**定理 4.3.** *对多方气体, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 的充要条件为在激波两侧成立*

$$u_->u_+. \tag{4.47}$$

**证明**　由定理 4.1 知, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 等价于越过激波成立

$$\rho_1>\rho_0. \tag{4.48}$$

设激波为右传播的, 即成立 $v_0,v_1<0$. 此时, 由 (4.12) 式可见, 条件 (4.48) 等价于

$$v_0<v_1, \tag{4.49}$$

即

$$u_0 < u_1. \tag{4.50}$$

但对于右传播激波，标之以“0”的是右状态“+”，而标之以“1”的是左状态“−”．所以 (4.50) 就是 (4.47) 式．

对于左传播激波可以类似地证明．定理 4.3 证毕．

## §5. 一维流体力学方程组的拉格朗日形式

### 5.1. 引言

在前面推导理想流体及粘性热传导流体动力学方程组时，我们将描述流体运动状态的量表示为时间 $t$ 及空间笛卡儿坐标 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的函数来进行考虑．这样建立的方程组称为*欧拉形式的方程组*．它的特点是在任意固定的位置 (地点) 来考察流体状态随时间 $t$ 的变化规律．但还有另外一种看问题的方法，即在任意固定 (但在运动着的 !) 流体质点上观察流体状态随时间 $t$ 的变化规律．这样建立的方程组称为*拉格朗日形式的方程组*．简言之，前者对固定在空间的坐标系考察问题，后者对固定在质点上的坐标系考察问题．在拉格朗日形式下，描述流体状态的量将表示为时间 $t$ 及*物质坐标* (*拉格朗日坐标*) 的函数，而质点在空间中的位置即其*欧拉坐标* $\boldsymbol{x}$ 将作为时间及质点坐标的函数来确定．采用拉格朗日坐标下的方程组在一维运动的情形将带来较大的方便，下面就限于考察这一情形．

### 5.2. 拉格朗日坐标

现在指出引入拉格朗日坐标的方法，阐明其物理意义，并给出拉格朗日坐标与欧拉坐标之间的变换关系式．

由连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0,$$

知道

$$\rho \mathrm{d}x - \rho u \mathrm{d}t$$

是一个全微分．于是必存在函数 $m = m(t, x)$ 使得

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}x - \rho u \mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

用 $m$ 代替 $x$ 为新的自变量 (另一个变量仍取为 $t$), 就得到拉格朗日坐标 $(t', m)$, 而

$$t' = t, \tag{5.2}$$

$$m = m(t, x) \tag{5.3}$$

就是欧拉坐标和拉格朗日坐标间的变换式. 由于 $\rho > 0$, 而 $\dfrac{\partial m}{\partial x} = \rho$, 上述变换是整体可逆的.

这样引入的拉格朗日坐标 $m$ 的物理意义可以解释如下. 由 (5.1), 我们可取

$$m(t, x) = \int_{(0,0)}^{(t,x)} \rho \mathrm{d}x - \rho u \mathrm{d}t, \tag{5.4}$$

且积分值与从 $(0, 0)$ 到 $(t, x)$ 的积分路径无关. 于是可取如图 9 所示的特殊路径 $OAB$, 其中 $OA$ 为 $t = 0$ 时在原点的质点的运动规律 $x = x(t)$ 在 $(t, x)$ 平面上的图象, 而 $AB$ 为过 $B(t, x)$ 点平行于 $x$ 轴的直线段. 这样,

$$m(t, x) = \int_{OA+AB} \rho \mathrm{d}x - \rho u \mathrm{d}t. \tag{5.5}$$

由于在 $OA$ 上, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u$, 因此 $\int_{OA} \rho \mathrm{d}x - \rho u \mathrm{d}t = 0$; 而在 $AB$ 上,

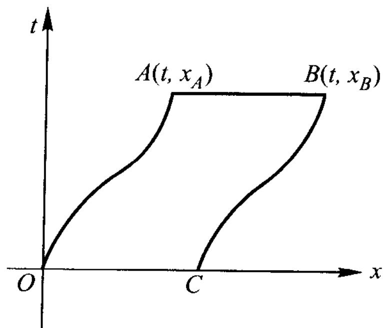



图 9

$\mathrm{d}t=0$, 于是, (5.5) 式化为

$$m(t,x)=\int_{x_A}^{x_B}\rho\mathrm{d}x, \tag{5.6}$$

其中 $x_A$ 及 $x_B$ 分别表示 $A$ 及 $B$ 点的欧拉坐标. (5.6) 式右端表示 $AB$ 间的流体质量 (若 $B$ 在 $A$ 之右, 其值为正; 若 $B$ 在 $A$ 之左, 其值为负). 设 $t$ 时刻在 $B$ 点的质点在 $t=0$ 时位于 $C$ 点. 由于 $t$ 时刻在 $A$ 点的质点在 $t=0$ 时位于原点, 由质量守恒定律, $m(t,x)$ 应等于 $t=0$ 时 $OC$ 间流体的质量. 于是, 拉格朗日坐标 $m$ 表示质量, 而 $m=$ 常数则表示同一质点, 故 $m$ 为质点坐标. 若过 $C$ 点画出 $t=0$ 时在 $C$ 点的质点在 $(t,x)$ 平面上的运动规律曲线 $CB$, 在整个这条曲线上 $m=$ 常数. 因此, 由欧拉坐标 $(t,x)$ 过渡到拉格朗日坐标 $(t',m)=(t,m)$, 本质上就是取流体质点在 $(t,x)$ 平面上的运动规律曲线作为坐标曲线.

下面说明欧拉坐标与拉格朗日坐标间的一些变换法则. 由

$$\mathrm{d}m = -\rho u\mathrm{d}t+\rho\mathrm{d}x, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t, \tag{5.8}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}-\rho u\frac{\partial}{\partial m}, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho\frac{\partial}{\partial m}. \tag{5.10}$$

又由

$$\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t'+\tau\mathrm{d}m, \tag{5.11}$$

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t', \tag{5.12}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \tau\frac{\partial}{\partial x}. \tag{5.14}$$

变换式 (5.9)—(5.10) 和 (5.13)—(5.14) 给出了对 $(t,x)$ 的偏导数与对 $(t',m)$ 的偏导数间的变化规律.

此外, 由 (5.11) 式知, 在已知拉格朗日坐标 $(t',m)$ 后, 欧拉坐标 $x$ 可由下式得到:

$$x=\int_{(0,0)}^{(t',m)} u\mathrm{d}t'+\tau\mathrm{d}m. \tag{5.15}$$

而在已知欧拉坐标 $(t,x)$ 时, 拉格朗日坐标 $m$ 则可由 (5.4) 式求得.

### 5.3. 一维理想流体力学方程组的拉格朗日形式

在欧拉坐标下的一维理想流体力学方程组可写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=F, \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{5.18}$$

(见 (1.90)—(1.92)). 引入拉格朗日坐标 $(t',m)$, 就可以按照前述的坐标变换式化为拉格朗日坐标下的相应的方程组. 这儿特别注意

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

恰表示固定质点对 $t$ 的求导. 这是和拉格朗日坐标的实质一致的.

对方程 (5.16) 的转换可用上述变换式 (5.9)—(5.10) 进行. 更简单的方法是注意到 (5.16) 式已用来定义拉格朗日坐标 $m$, 即说明 $\rho\mathrm{d}x-\rho u\mathrm{d}t=\mathrm{d}m$ 为一全微分, 它现在要以 $\mathrm{d}x=u\mathrm{d}t'+\tau\mathrm{d}m$ 为一全微分的条件来代替, 从而应有

$$\frac{\partial\tau}{\partial t'}-\frac{\partial u}{\partial m}=0. \tag{5.19}$$

而由 (5.9)—(5.10) 式易知, (5.17) 与 (5.18) 两方程分别化为

$$\frac{\partial u}{\partial t'}+\frac{\partial p}{\partial m}=F, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t'}=0. \tag{5.21}$$

于是，一维理想流体力学方程组在拉格朗日坐标下的形式 (对连续可微流动) 为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = F, \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{5.24}$$

这里为方便起见，仍将拉格朗日坐标 $(t', m)$ 记为 $(t, x)$.

上述方程组较之原方程组 (5.16)—(5.18) 具有较为简单的形式：(5.22) 与 (5.24) 是线性常系数的方程，整个方程组的非线性项只体现在 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 中 $(p = p(\tau, S))$. 特别，方程 (5.24) 十分简单. 对于柯西问题，只要已知 $S$ 的初值

$$t = 0 : S = S_0(x), \tag{5.25}$$

由方程 (5.24) 就有 $S = S_0(x)$. 这样，方程组 (5.22)—(5.24) 就化为由两个方程所组成的方程组：

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(\tau, S_0(x)) = F. \tag{5.27}$$

特别对均熵流动 $S \equiv$ 常数，其拉格朗日坐标下的方程组具有更为简单的形式：

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(\tau) = F. \tag{5.29}$$

在 $F \equiv 0$ (外力为零) 时，这是一个形式简单且具典型意义的拟线性双曲型方程组，有时称为 $p -$ 方程组，至今仍是很多人研究的对象.

### 5.4. 一维粘性热传导流体力学方程组的拉格朗日形式

一维粘性热传导流体力学方程组在欧拉坐标下的形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{4}{3}\mu+\mu')\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F, \tag{5.31}$$

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u\frac{\partial e}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial x}-(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{5.32}$$

(见 (2.50)—(2.52)). 由同样的理由, 其在拉格朗日坐标下的方程组可写为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t'}-\frac{\partial u}{\partial m}=0, \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'}+\frac{\partial p}{\partial m}-\frac{\partial}{\partial m}\left((\frac{4}{3}\mu+\mu')\rho\frac{\partial u}{\partial m}\right)=F, \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t'}+p\frac{\partial u}{\partial m}-\rho(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial m}\left(\kappa\rho\frac{\partial T}{\partial m}\right). \tag{5.35}$$

利用 (5.33), 第三个方程 (5.35) 又可写为

$$\frac{\partial e}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t'}+\left(p-\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)\frac{\partial u}{\partial m}-\rho(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial m}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial m}\left(\kappa\rho\frac{\partial T}{\partial m}\right). \tag{5.36}$$

仍将 $(t',m)$ 改写为 $(t,x)$, 得

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{4}{3}\mu+\mu')\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F, \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+p\frac{\partial u}{\partial x}-\rho(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\rho\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{5.39}$$

或

$$\frac{\partial e}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}+\left(p-\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\rho(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\rho\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{5.39$'$}$$

这比原欧拉形式的方程组 (5.30)-(5.32) 具有较为简单的形式.

最后指出，拉格朗日坐标变换能使原非线性方程组的形式变得比较简单，因为它是一个和解有关的变换 —— 以运动规律曲线为坐标曲线. 在解还没有求得之时，要具体地写出拉格朗日变换是不可能的. 但上面的讨论告诉我们，只要解存在，总可以进行拉格朗日坐标变换，并将方程组化为在拉格朗日坐标下的形式. 而只要解出在拉格朗日坐标下的方程组，就可以通过其逆变换得到在欧拉坐标下的相应的解，因此整个讨论是有效的.

为了求解在拉格朗日坐标下的方程组，还要说明原先在欧拉坐标下的定解条件怎样转化为在拉格朗日坐标下的定解条件. 例如若在欧拉坐标下给定初始条件

$$t=0: u=u_0(x), \rho=\rho_0(x), T=T_0(x)(\text{或} S=S_0(x)), \tag{5.40}$$

那么由 (5.4) 知

$$m(0,x)=\int_0^x \rho_0(x)\mathrm{d}x. \tag{5.41}$$

由上式可得到在初始时刻 $t=t'=0$ 相应于 $x$ 的 $m$ 值，从而可解得 $x$ 为 $m$ 的函数: $x=x(m)$. 于是在拉格朗日坐标下的初始条件为

$$t'=0: u=\overline{u}_0(m), \rho=\overline{\rho}_0(m), T=\overline{T}_0(m)(\text{或} S=\overline{S}_0(m)), \tag{5.42}$$

其中 $\overline{u}_0(m)=u_0(x(m))$ 等.

在欧拉坐标下沿质点运动规律曲线上给定的边界条件，在拉格朗日坐标下具有十分简单的形式. 例如对方程组 (5.33)—(5.35), 若在过原点的曲线 $x=x_0(t)$ $(x_0(0)=0)$ 上给定边界条件 (见图 10)

$$u=u_0(t), \qquad T=T_0(t), \tag{5.43}$$

并成立

$$\dot{x}_0(t)=u_0(t). \tag{5.44}$$

在转换到拉格朗日坐标时, $x = x_0(t)$ 化为 $m = 0$, 故边界化为直边界; 而边界条件 (5.43) 则转化为

$$m = 0 : u = u_0(t), T = T_0(t). \tag{5.45}$$

这就大大地简化了问题, 亦是引入拉格朗日坐标的好处之一.

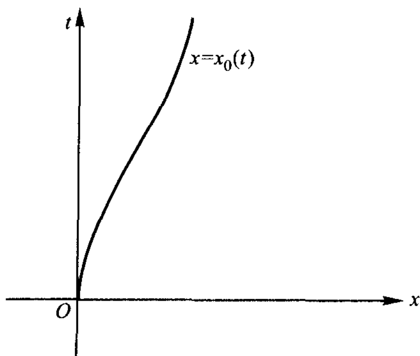



图 10

## 习 题

1. 试证明: 当流场为无旋, 即 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 时, 理想流体的欧拉方程可写为如下形式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p = \boldsymbol{F}.$$

2. 试证明: 如果质量力 $\boldsymbol{F}$ 有势, 即存在 $\phi$ 使 $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\,\phi$, 那么理想流体的能量守恒方程的微分形式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

3. 设 $\Omega$ 为单连通区域, 在其边界 $\Gamma$ 上给定向量场 $\boldsymbol{u}_B$. 则在 $\overline{\Omega}$ 中存在速度场 $\boldsymbol{u}$, 使在 $\Omega$ 中成立 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$, 且该速度场有势, 即存在

数量场 $\phi$ 使 $\boldsymbol{u}=-\operatorname{grad}\phi$; 并在 $\Gamma$ 上的法向分量 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}_B\cdot\boldsymbol{n}$, 其充分必要条件为

$$\int_\Gamma \boldsymbol{u}_B\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为单位外法线向量.

4. 设 $\boldsymbol{u}$ 为满足第 3 题中条件的解. 证明 $\boldsymbol{u}$ 为如下变分问题

$$\min_{\boldsymbol{w}\in A}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho|\boldsymbol{w}|^2\mathrm{d}x$$

的解, 其中

$$A=\{\boldsymbol{w}\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega});\quad \operatorname{div}\boldsymbol{w}=0,\ \text{在}\Omega\ \text{中};\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}_B\cdot\boldsymbol{n},\ \text{在}\Gamma\ \text{上}\}.$$

5. 设流场中流体的应力张量为 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$. 试证明: 在以某点为中心、 $r$ 为半径的球面 $S_r$ 上的法向应力分量的平均值, 在 $r\to 0$ 时的极限为该点正应力的平均值, 即成立

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r}\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33}),$$

其中 $\boldsymbol{p}_n$ 由 (2.5) 或 (2.6) 式定义.

6. 试证明: 由纳维 – 斯托克斯方程组描述的流体运动一般总是有旋的, 即若 $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{0}$, 则纳维 – 斯托克斯方程组 (3.4)—(3.5) 即化为欧拉方程组 (1.15).

7. 设有以 $x$ 轴为轴向的等横截面管道, 其中充满着沿 $x$ 方向流动的不可压缩的理想流体, 在每一横截面上流体的状态相同, 且 $p=p(x)$. 若已知 $p(0)=p_1$, $p(L)=p_2$, 且 $p_1>p_2$, 试确定管内流体的速度 (忽略体积力).

8. 考察固定在 $y=0$ 与 $y=1$ 处两个平板之间的定常粘性不可压缩流体沿 $x$ 方向的流动. 设 $p=p(x)$, 且已知 $p(0)=p_1$, $p(L)=p_2$, $p_1>p_2$. 试求该流场的速度 $u(x,y)$ 与压力 $p(x)$ (忽略体积力).

9. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界域, $\boldsymbol{u}$ 为纳维 – 斯托克斯方程组 (3.4)—(3.5) 满足边界条件 (3.7) 的解, 其中体积力 $\boldsymbol{F}\equiv\boldsymbol{0}$. 证明流体的动能随时间的增加而减少, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

10. 试证明：一维理想流体力学方程组的拉格朗日形式 (5.22)—(5.24) 也可写为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = F, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(e + \dfrac{u^2}{2}) + \dfrac{\partial}{\partial x}(pu) = Fu. \end{cases}$$

11. 对由第 10 题中给出的拉格朗日形式的一维理想流体力学方程组，给出其解在强间断线上应满足的间断连接条件 (假设体积力 $F \equiv 0$).

12. 设函数 $L(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ 关于变量 $\xi_0 > 0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ 为严格凸的．证明函数

$$M = \frac{1}{\xi_0} L(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$$

关于变量

$$\eta_0 = \frac{1}{\xi_0}, \eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \cdots, \eta_n = \frac{\xi_n}{\xi_0}$$

为严格凸的.

13. 试引进新的未知函数，将 $p$ - 方程组

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(\tau) = 0 \end{aligned}$$

化为守恒律形式的一阶拟线性对称双曲组．这里假定 $p'(\tau) < 0$.

## 参考文献


[1] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法，卷 II. 熊振翔，杨应辰译. 北京：科学出版社， 1977

[2] 吴望一. 流体力学 (上册). 北京：北京大学出版社， 1982

[3] Chorin A J, Marsden J E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Second Edition. Springer-Verlag, 1990

[4] Smoller J. *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations.* Springer–Verlag, 1983

[5] Teman R. *Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis.* North–Holland, 1984

[6] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic Flow and Shock Waves.* New York: Interscience Publishers, 1948

[7] Li Ta-tsien. *Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems.* Research in Applied Mathematics 32. Masson/John Wiley, 1994

[8] Harten A, Lax P D. *Random choice finite difference schemes.* SIAM J. Num. Anal., 18 (1981). 289~315

[9] Lax P D. *Symmetrizing hyperbolic differential equations.* Nonlinear Hyperbolic Problems, Eds. C. Carasso, P.-A. Raviart and D. Serre, Lecture Notes in Mathematics 1270, Springer–Verlag, 1987. 150~151

[10] Godounov S K. *Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques.* in Nonlinear Hyperbolic Problems, Eds. C. Carasso, P.-A. Raviart and D. Serre, Lecture Notes in Mathematics 1270, Springer–Verlag, 1987. 136~149

[11] Panel on Mathematical Sciences, Board on Mathematical Sciences, Commission on Physical Sciences, Mathematics, and Resources & National Research Council. *Mathematical Sciences: A Unifying and Dynamic Resource.* Washington, D. C.: National Academy Press, 1986

[12] Matsumura A, Nishida T. *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases.* J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 67-104

[13] Leray J. *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois.* J. Math. Pures et Appl., 13 (1934). 331~418

[14] Temam R. *Infinite–Dimensional Dynamical Systems in Me-*

*chanics and Physics.* Applied Mathematical Sciences 68, Springer–Verlag, 1988

[15] Ladyzhenskaya O A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Second Edition. New York: Gordon and Breach, 1969

[16] Constantin P, Foias C. *Navier–Stokes Equations.* Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1988

# 第三章　磁流体力学

## §1. 等离子体

磁流体力学研究等离子体这种导电流体在电磁场中的运动. 为此首先对等离子体这一物质的第四态作一初步的介绍, 并指出它的一些今后要用到的性质.

我们已经知道, 任何物质由于温度、压力等条件的不同可以处于固态、液态或气态等不同的状态. 这是物质的三种常见的聚集态. 它们在一定条件下可以互相转化. 如果温度继续升高, 物质的状态还可能发生变化. 在高温之下 (几万度或几十万度), 物质的分子与原子之间的运动十分剧烈, 不仅彼此之间难以相互束缚, 而且原子中的外层电子因为具有相当大的动能, 可以 (至少有一部分) 摆脱原子核对它们的束缚, 成为自由电子, 而原子失去自由电子则成为带正电的离子. 这样, 物质就变成了一团由电子和离子组合而成的混合物. 它既不同于固体和液体, 和普通气体的性质也有许多本质上的区别. 它是物质的另一种全新的聚集态, 称为 等离子体, 也称为物质的第四态.

具体地说, 等离子体作为发生了电离 (无论是部分电离还是完全电离) 的气体, 虽然在某些方面跟普通气体有相似之处, 例如描述普通气体的宏观物理量如密度、温度、压力等对等离子体 (即电离气体) 同样适用, 但它的主要性质却发生了本质的变化. 它是一种导电率很高的导电流体, 受电磁场的影响十分明显. 而且只要气体中的电离的成份超过千分之一, 它的行为主要就由离子和电子之间的库仑作用力支配, 中性粒子之间的相互作用退居次要地位. 鉴于这种聚集态中电子的负电荷总数和离子的正电荷总数在数值上是相等的, 宏观上呈现电中性, 因而有等离子体之命名.

由上可见, 等离子体就是电离气体, 它由电子、离子及中性粒子三种成份组成. 由于在常温下气体热运动的能量不大, 不含自发电离, 因此在我们日常生活环境中的物质都以固、液、气这三态的形式存在, 而不以等离子体的第四态形式存在. 然而, 在茫茫的宇宙中却有 99% 以

上的物质是等离子体. 事实上, 在太阳中心温度高达几千万度, 那里的物质都是以等离子体状态存在. 类似于太阳的许许多多恒星、星系以及广阔无垠的星际空间物质都是等离子体. 像我们人类居住的地球这样的"冷星球"在宇宙中反倒是极少数.

19 世纪初, 物理学家已开始考虑在已知的物质三种聚集态之外还有没有在性质上有本质区别的第四态? 英国物理学家克鲁克斯 (Crookes) 在 1879 年研究了真空放电管的放电过程后, 第一次指出了物质第四态的存在. 到 1929 年朗谬尔 (Langmuir) 和汤克斯 (Tanks) 第一次引入了等离子体这个名称, 用来表示物质的第四态, 即完全电离或部分电离了的物理状态. 从 20 世纪 30 年代到第二次世界大战结束之前, 开展了对大气中电离层的研究, 它是由等离子体构成的. 40 年代阿尔文 (H. Alfvén) 建立了磁流力学, 并成功地应用于空间物理和天体物理, 如对银河系、星云和太阳的研究. 它们在极高的温度下, 都是由等离子体组成的, 而且不管如何稀薄, 在研究大规模的过程 (大尺度) 时, 总可以作为连续介质来处理. 这些研究的对象都限于宇宙空间和高层大气上, 似乎与人们相距太远. 如果仅仅限于这样的应用, 等离子体物理及磁流体力学的研究可能不会受到太大的推动. 后来, 1945 年夏天, 在日本广岛和长崎上空爆炸了两颗原子弹. 在爆炸的上空, 首先在地球表面形成了大量的温度高达几百万度的人造等离子体! 以后, 又成功地爆炸了氢弹, 在地球上空起了同样的作用, 这是不可控制的核聚变反应. 紧接着, 前苏联、美国、英国等几乎同时于 50 年代初期各自秘密地开展受控核聚变的研究, 使等离子物理及磁流体力学的研究掀起新的高潮. 受控核聚变的研究是很吸引人的课题. 它以海水为原料, 提取氢的同位素氘, 在近亿度的极高温度下发生热核反应, 释放巨大的能量. 这种能源的原料取之不尽, 用之不竭, 而且极少放射性污染, 是一种十分理想的新能源. 这种研究一旦成功, 将使人类面临的能源危机得到最终的解决. 它有赖于对高温等离子体物理的深入研究. 与此同时, 由于人造卫星、宇宙火箭的发射和射电天文望远镜的发明, 在空间物理和天体物理之间的观测资料也大大丰富起来, 这也进一步推动了等离子体物理的研究. 可以说, 天体物理和受控核聚变的研究是推动磁流体力学这门新兴学科的两大主要动力.

等离子体的一个基本特性是*电中性*. 前面已说过, 由电子、离子及中性粒子组成的等离子体, 在宏观上是中性的, 即电子的负电荷总数和离子的正电荷总数相等. 不仅如此, 等离子体的电中性在任一微元

中也应该成立，即正负电荷数必须处处相等，在任一微元中正负电荷的代数和均为零. 这是因为等离子体对电中性的破坏非常敏感. 如果在等离子体内某处一旦出现电荷分离，立即就会产生巨大的电场，促使电中性恢复. 举例来说，对氢等离子体，用 $n_e$ 和 $n_i$ 分别代表其电子和离子的浓度 (单位体积中的电子和离子数), 电中性条件为 $n_e \approx n_i$. 在等离子体中即使有很轻微的电荷分离，即电中性稍有破坏，将产生巨大的电场. 例如考虑一个半径为 10mm 的球体，其中等离子体的浓度为 $n_e \approx n_i \approx 10^{20}/\mathrm{m}^3$. 假定由于某种扰动使得百分之一的电子移到此小球之外，那么小球内离子所带的正电荷就多于负电荷. 这些过剩的正电荷就有电位分布. 计算可得球面与球心之间 (相距仅 10mm!) 的电位差将高达 640kV 伏特，这是不可思议的，也根本不可能. 因此等离子体中的正负电荷数必须处处相等，不能偏离. 当然，这也不是绝对的，带电粒子的热运动总会给电中性带来某些轻微的影响. 但只要由此产生的电荷过剩引起的电场非常微弱，以至于对等离子体中绝大部分粒子不发生影响，仍可认为等离子体满足电中性条件. 今后我们将遵循这一事实.

由第一章 (7.12) 式，我们知道，对于媒质有

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

其中 $\mu = \mu_r \mu_0$ 为磁导率， $\mu_0$ 为真空中的磁导率，而 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 为相对磁导率. 对等离子体，由于温度极高，磁化率 $\chi_m \approx 0$, 因此相对磁导率 $\mu_r \approx 1$. 为简单起见，今后恒假设 $\mu_r = 1$, 于是

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}. \tag{1.1}$$

此外，由于等离子体是一个良导体，在其中难以建立强的电场 $\boldsymbol{E}$. 因为有了强电场，立刻引起带电粒子及电子的运动和重新分布，这就抵消了电场. 因此，相对于 $\boldsymbol{H}$ 而言， $\boldsymbol{E}$ 是一个小量. 在今后， $\boldsymbol{H}$ 将是讨论的重点. 所以，对这种电磁流体的力学通称为 磁流体力学.

## §2. 磁流体力学方程组

考虑等离子体这样的连续流体媒质，由于其中存在大量的带电粒子，它是一种有良好导电性能的流体. 它在电磁场中的运动产生电流，从而在媒质内部感生出电磁场，而引起原有电磁场的改变；另一方面，

电磁场的存在又对运动着的导电等离子体产生作用力 (洛伦兹力), 这又会对导电等离子体的运动产生影响. 因此, 这就产生了电磁现象和流体动力学现象的复杂的相互作用. 这样, 等离子体在电磁场中的运动, 既应遵守电磁场的基本运动规律, 又要遵守流体力学的运动规律. 一方面, 在流体力学方程组中必须加入电磁力的作用; 另一方面, 在描述电磁场的麦克斯韦方程组中必须加入由于导电流体 (等离子体) 运动所产生的电流. 这就必须将流体力学方程组和麦克斯韦方程组适当耦合起来. 这样联立起来的方程组就是磁流体力学的基本方程组, 称为磁流体力学方程组.

### 2.1. 考虑到导电媒质 (等离子体) 的运动对麦克斯韦方程组的修正

媒质中的麦克斯韦方程组 (见第一章 (7.15)—(7.18)) 为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_f, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}_f, \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$.

由 (1.1) 式, (2.2) 及 (2.3) 式可分别写为

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{2.6}$$

在静止媒质的情形, 我们有微分形式的欧姆定律 (见第一章 (8.27) 式)

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma \boldsymbol{E},$$

其中 $\sigma$ 为媒质的电导率. 这儿 $\boldsymbol{E}$ 是单位正电荷在该点所受的力, 它决定了相应的自由电流密度向量 $\boldsymbol{j}_f$. 现在导电媒质本身在运动, 其速度为 $\boldsymbol{u}$. 由洛伦兹力公式 (见第一章 (3.19) 式), 附着于此运动媒质上的单位正电荷所受的力为

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \mu_0 \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}.$$

于是可设

$$\boldsymbol{j}_f=\sigma(\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.7}$$

上式中的 $\sigma$ 设为常数，而且由于等离子体为良导体，$\sigma\gg 1$.

现在考察 (2.4) 式. 将 (2.7) 式代入可得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\sigma(\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.8}$$

取振荡形式的电场 $\boldsymbol{E}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{E}_0$, 其中 $\boldsymbol{E}_0$ 不依赖于 $t$. 此时位移电流项 (设 $\varepsilon$ 为常数)

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\mathrm{i}\varepsilon\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{E}_0,$$

而

$$\sigma\boldsymbol{E}=\sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{E}_0.$$

由上两式可见，若 $\sigma\gg\varepsilon\omega$, 即 $\dfrac{\sigma}{\omega}\gg\varepsilon$, 位移电流项将不起作用. 由于 $\sigma\gg 1$, 故除非极高频的振荡，上述假设总成立. 因此，在方程 (2.4) (即 (2.8)) 中可以忽略位移电流项，而将其写为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\sigma(\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.9}$$

由电动力学中导出麦克斯韦方程组的过程知，引入位移电流项是为了和电荷守恒方程 $\dfrac{\partial\rho_f}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}_f=0$ 匹配. 现在这一假设意味着要求 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}_f=0$. 这只要在 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f$ 两端作用散度算子 div 即可得. 这意味着电荷不可能堆积 (即对任一区域，在一定时间内，流入的电荷等于流出的电荷), 这与等离子体在任一微元中的电中性是一致的.

下面讨论的目的是消去方程组中的 $\boldsymbol{E}$, 而突出对磁流体力学起关键作用的 $\boldsymbol{H}$, 得到只含 $\boldsymbol{H}$ 的方程组. 为此，由 (2.9) 式解得

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}-\mu_0\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}. \tag{2.10}$$

将其代入 (2.5) 式中，就得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\sigma\mu_0}\mathrm{rot}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}+\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.11}$$

因为 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H}$, 并注意到 (2.6) 式，我们有

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H} \tag{2.12}$$

及

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{2.13}$$

这是磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 所应满足的方程，但其中包含了媒质的运动速度 $\boldsymbol{u}$. 它不能单独求解，必须和流体动力学方程组联立起来求解.

这儿指出，方程 (2.13) 实际上可化为对初值的要求. 事实上，若有初始条件

$$t = 0 : \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0(x_1, x_2, x_3),$$

且成立 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}_0 = 0$, 在方程 (2.12) 两端作用散度算子 div, 并注意 $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$, 即有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{H}) = \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta(\operatorname{div}\boldsymbol{H}),$$
$$t = 0 : \operatorname{div}\boldsymbol{H}(= \operatorname{div}\boldsymbol{H}_0) = 0.$$

由热传导方程柯西问题解的唯一性，即得 (2.13) 式.

### 2.2. 考虑到电磁场的存在对流体力学方程组的修正

对等离子体，密度、温度、压力及速度等物理量仍有意义. 质量守恒定律仍为连续性方程 (见第二章 (2.22) 式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0. \tag{2.14}$$

但在考虑动量及能量守恒定律时，为了将流体及电磁场作为一个整体来考察，应将电磁场的动量及能量以及相应的动量流密度张量与能量流密度向量加入通常对流体考虑的动量和能量方程中去.

为此，首先结合等离子体的特点，对上述这些电磁量作一些简化和说明.

由第一章 §7 知，在 $\mu_r = 1$ 的情形，

电磁动量密度向量为 $\dfrac{1}{c^2}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{c^2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$,

电磁动量流密度张量为 $\dfrac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu_0 H^2)\boldsymbol{I} - \varepsilon\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E} - \mu_0\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}$,

电磁能量密度为 $\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\mu_0 H^2)$,

电磁能量流密度向量为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.

在现在的情形下，结合等离子体的特点，正如对麦克斯韦方程组已经进行了必要的简化一样（并和这种简化相配合），我们对上述电磁场量也要进行一定的简化.

正如上段末所述，由于等离子体是良导体，因此电场 $\boldsymbol{E}$（相对于 $\boldsymbol{H}$ 而言）是一个小量，从而 $E^2$ 的项相对于 $H^2$ 而言可以忽略；此外，电磁动量密度向量中有 $\boldsymbol{E}$，又分母中有一个 $c^2$，其数量级很小，也可以忽略. 这样，我们有

电磁动量密度向量为 $\mathbf{0}$,

电磁动量流密度张量为 $\mu_0(\frac{1}{2}H^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H})$,

电磁能量密度为 $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$,

电磁能量流密度向量为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.

现在建立动量守恒方程. 由上述，只须在对单纯流体力学的动量守恒方程中加入由于电磁动量流所带来的流入所考察的区域中的动量项. 于是方程可写为（参阅第二章 (2.23) 式）

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u})+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P})-\mu_0\mathrm{div}\,(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}H^2\boldsymbol{I})=\rho\boldsymbol{F}. \quad (2.15)$$

记

$$\boldsymbol{\Pi}=\{\pi_{ij}\}=\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P}-\mu_0(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}H^2\boldsymbol{I}), \quad (2.16)$$

其中 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 由第二章中广义牛顿法则决定（见该章 (2.20) 式），则 (2.15) 式可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u})+\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Pi}=\rho\boldsymbol{F}. \quad (2.17)$$

直接计算可以证明

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}H^2\boldsymbol{I})=\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}. \quad (2.18)$$

事实上，记 $\boldsymbol{H}=(H_1,H_2,H_3)$，注意到 (2.13) 式，有

(2.18)式左端的第一个分量

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_1}(H_1^2 - \frac{1}{2}H^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(H_1 H_3) \\
&= H_2\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right) + H_3\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right) \\
&= \text{(2.18) 式右端的第一个分量.}
\end{aligned}
$$

类似地, 可以证明 (2.18) 式两端的第二及第三个分量分别相等. 这样, 将 (2.18) 式代入 (2.15) 式, 就有

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}) - \mu_0 \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} = \rho \boldsymbol{F}. \tag{2.19}
$$

这个方程可由单独考虑流体这一体系, 并把电磁场对此导电流体的作用力作为外力计及其冲量纳入动量平衡的方程中得到. 事实上, 对任一流体体积微元 $\mathrm{d}x$, 由洛伦兹力公式, 电磁场在其上的作用力应为

$$
(\tilde{\rho}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_f \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}x,
$$

这儿 $\tilde{\rho}$ 表示体电荷密度, $\boldsymbol{j}_f$ 为传导电流密度. 注意到等离子体在任一体积微元中呈电中性 (见 §1), 有 $\tilde{\rho} = 0$, 并注意到 (1.1) 式, 此力现为

$$
\mu_0 \boldsymbol{j}_f \times \boldsymbol{H}\mathrm{d}x.
$$

再由忽略了位移电流项的 (2.4) 式 (即 (2.7) 及 (2.9) 式)

$$
\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f,
$$

此力又可写为

$$
\mu_0 \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}\mathrm{d}x,
$$

其中不出现含 $\boldsymbol{E}$ 的项. 这样, 在区域 $\Omega$ 中, 在时段 $[t_1, t_2]$ 内电磁场力的冲量为

$$
\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \mu_0 \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
$$

将此项加入动量守恒方程 (第二章的 (2.23) 式) 中, 就可得到方程 (2.19).

利用连续性方程 (2.14), 并具体地代入 $\boldsymbol{P}$ 之下述表达式 (见第二章 (2.20) 式, 以下为避免与磁导率混淆, 将粘性系数 $\mu$ 及 $\mu'$ 分别用

$\overline{\mu}$ 及 $\overline{\mu}'$ 来表示)

$$\begin{aligned} p_{ij} &= -p\delta_{ij} + \overline{\mu}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\delta_{ij}\right) \\ &\quad + \overline{\mu}'\operatorname{div}\boldsymbol{u}\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

动量方程 (2.19) 可写为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\mu}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\overline{\mu}' - \frac{2}{3}\overline{\mu})\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) - \frac{\mu_0}{\rho}(H \times \operatorname{rot}\boldsymbol{H})_i + F_i \\ &\qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{2.21}$$

或

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \operatorname{div}\boldsymbol{P} - \mu_0\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} = \rho\boldsymbol{F}, \tag{2.22}$$

这就是现在的欧拉方程, 而 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意义见第二章中的 (1.17) 式.

现在考察能量方程. 这儿需要在原有流体能量平衡式中加入电磁能量密度及电磁能量流密度向量的贡献. 将由 (2.10) 式解得的 $\boldsymbol{E}$ 的表达式代入电磁能量流密度向量, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \\ &= \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} - \mu_0(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}. \end{aligned}$$

这样, 即可得如下守恒律形式的能量方程 (参阅第二章 (2.29) 式)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}) \\ &+ \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} - \mu_0(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}\right) \\ &= \operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T) + \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

利用连续性方程 (2.14) 及张量 $\boldsymbol{P}$ 的表达式 (2.20), 上式可化为 (参阅第二章 (2.31) 式)

$$\rho\frac{\mathrm{d}(e + \frac{1}{2}u^2)}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div}(p\boldsymbol{u})$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\mu}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_j+(\overline{\mu}'-\frac{2}{3}\overline{\mu})u_i\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)$$

$$+\mu_0\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}-\mu_0(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}\right)$$

$$=\mathrm{div}\,(\kappa\mathrm{grad}\,T)+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{2.24}$$

利用上面已得到的欧拉方程 (2.21), 并利用 (2.11) 式, (2.24) 式又可改写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\overline{\mu}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$-(\overline{\mu}'-\frac{2}{3}\overline{\mu})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2-\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H}$$

$$+\mu_0\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})-\mu_0\boldsymbol{H}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}$$

$$+\mathrm{div}\left(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}-\mu_0(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}\right)$$

$$=\mathrm{div}\,(\kappa\mathrm{grad}\,T). \tag{2.25}$$

为对上式进一步进行化简，我们先证明以下两式:

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H}-\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H})=|\mathrm{rot}\boldsymbol{H}|^2, \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})-\mathrm{div}\,((\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H})$$
$$-\boldsymbol{H}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}=0. \tag{2.27}$$

首先，利用向量分析中的公式 $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$, 立即可得 (2.26) 式，而 (2.27) 式左端则化为

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}.$$

由向量混合积的性质 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$, 上式为零，这便证明了 (2.27) 式.

注意到 (2.26) 和 (2.27) 式，能量守恒方程 (2.25) 又可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+p\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\overline{\mu}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$-(\overline{\mu}' - \frac{2}{3}\overline{\mu})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2 - \frac{1}{\sigma}|\mathrm{rot}\boldsymbol{H}|^2 = \mathrm{div}\,(\kappa \mathrm{grad}\,T). \tag{2.28}$$

如同在流体力学方程组中那样，利用热力学关系式 $\mathrm{d}e = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}\tau$，还可以在方程 (2.28) 中以熵 $S$ 代替内能 $e$. 事实上

$$\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &= \rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \\ &= \rho\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right) = \rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

在上式的推导过程中，我们利用了连续性方程 (2.14). 将 (2.29) 代入 (2.28) 式，即得

$$\begin{aligned}&\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \overline{\mu}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &-(\overline{\mu}' - \frac{2}{3}\overline{\mu})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2 - \frac{1}{\sigma}|\mathrm{rot}\boldsymbol{H}|^2 \\ &= \mathrm{div}\,(\kappa \mathrm{grad}\,T).\end{aligned} \tag{2.30}$$

这就是相应的热传递方程.

可以注意到，方程 (2.30) 可由单纯流体力学情形的相应的热传递方程 (参见第二章 (2.32) 式及 (1.22)—(1.24) 式)

$$\begin{aligned}&\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \overline{\mu}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &-(\overline{\mu}' - \frac{2}{3}\overline{\mu})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2 = \mathrm{div}\,(\kappa \mathrm{grad}\,T)\end{aligned} \tag{2.31}$$

加上由于电流所产生的焦耳热项而得到. 为此，我们先推导焦耳热的表达式. 先假设导电媒质是静止的. 其中有稳定电流，电流密度为 $\boldsymbol{j}_f$，电场强度为 $\boldsymbol{E}$. 此时，我们有

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma\boldsymbol{E},$$

其中 $\sigma$ 为电导率. 下面计算在单位时间内单位体积媒质由于通过电流而产生的焦耳热. 它是由维持电流的电场对导体内运动的电荷所作的

机械功转化而得的. 由第一章 §4, 我们易知它等于 $\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E}$ (作为习题). 于是在单位体积中、单位时间内电流放出的热量为

$$\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E} = j_f^2/\sigma.$$

此称为焦耳 – 楞次定律. 在导电媒质运动的情况下, 导体内由于通过电流而产生的能量耗散 (如发热) 应与导体的运动无关, 只决定于电流 $\boldsymbol{j}_f$. 因此, 运动导体在单位时间内所放出的焦耳热密度用电流密度来表示的式子仍与上面相同, 即为 $j_f^2/\sigma$. 但由忽略了位移电流项的 (2.4) 式, 有 $\boldsymbol{j}_f = \mathrm{rot}\boldsymbol{H}$, 故

$$\frac{j_f^2}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}|\mathrm{rot}\boldsymbol{H}|^2.$$

将这一项加入热传递方程 (2.31) 中, 即得所要求的方程 (2.30).

### 2.3. 磁流体力学方程组

将上面两段的内容即 (2.12)—(2.13)、(2.14)、(2.19) 及 (2.23) 式结合起来, 即得到一般情况下的磁流体力学方程组:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mathrm{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H}, \tag{2.32}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}) - \mu_0\mathrm{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} = \rho\boldsymbol{F}, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2) + \mathrm{div}\,((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}) \\ &\qquad + \mathrm{div}\,(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} - \mu_0(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}) \\ &= \mathrm{div}\,(\kappa\mathrm{grad}\,T) + \rho\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

其中 (2.33) 式可化为对初值的要求.

分别以方程 (2.21) 与 (2.30) 代替 (2.35) 与 (2.36), 上述方程组又可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mathrm{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H}, \tag{2.37}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=&\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\mu}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\\&+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}((\overline{\mu}'-\frac{2}{3}\overline{\mu})\operatorname{div}\boldsymbol{u})\\&-\frac{\mu_0}{\rho}(\boldsymbol{H}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{H})_i+F_i\quad(i=1,2,3),\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}-\overline{\mu}&\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\\&-(\overline{\mu}'-\frac{2}{3}\overline{\mu})(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2-\frac{1}{\sigma}|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}|^2\\&=\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T),\end{aligned} \tag{2.41}$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意义见第二章中的 (1.17) 式.

在以上这些方程中,未知函数 (例如说) 可取为 $\boldsymbol{H}=(H_1,H_2,H_3)$, $\rho$, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 及 $T$, 再加上状态方程 $p=p(\rho,T)$ 等, 就构成一个封闭的方程组.

方程 (2.37) 说明由于电导率 $\sigma$ 的存在 (且为有限值), 使磁场具有扩散性. 特别对静止的媒质, 方程 (2.37) 化为扩散方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H}. \tag{2.42}$$

由数理方程中关于扩散 (热传导) 方程解的表达式知, 若磁场 $\boldsymbol{H}$ 的空间变化的特征尺度为 $L_0$, 则磁场扩散的特征时间为

$$\tau=\sigma\mu_0L_0^2.$$

例如对地球磁场, 地核内导电流体相应的 $\dfrac{1}{\sigma\mu_0}\approx 1\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, 地球半径 $L_0\approx 6\times10^6\mathrm{m}$, 地磁场的特征扩散时间 $\tau\approx 4\times10^{12}\mathrm{s}\approx 10^6$年. 地球的年龄约为 $10^9$ 年, 远大于地磁场的特征扩散时间. 这就是说, 如果在地球形成的初期有一个原始地磁场, 它在最初的 $10^6$ 年间早已扩散

到外部空间去了. 因此, 目前的地磁场不可能是地球形成初期的原始场, 必然在地球内部存在某种运动过程, 以激发和维持目前的地磁场.

### 2.4. 不可压缩情形的磁流体力学方程组

现在假设运动流体是不可压缩的. 此时连续性方程 (2.39) 化为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \tag{2.43}$$

利用上式, 方程 (2.37) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H}, \tag{2.44}$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意义见第二章 (1.17) 式, 而 $\nabla=(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2},\dfrac{\partial}{\partial x_3})=\mathrm{grad}$ 为梯度算子. 实际上, 利用向量旋度的下述公式

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\\ &\quad+\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{b}\cdot\nabla=b_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+b_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+b_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$, 并注意到 (2.38) 式, 有

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})=(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

于是方程 (2.37) 可写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H}. \tag{2.45}$$

注意到 (2.43) 式, 由上式立即得到 (2.44) 式.

类似于纳维 – 斯托克斯方程组的情形, 设 $\overline{\mu}$ 为常数, 并不妨设 $\rho=1$, 再利用 (2.43) 式, 则动量方程 (2.40) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{grad}\,p=\overline{\mu}\Delta\boldsymbol{u}-\mu_0\boldsymbol{H}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{F}. \tag{2.46}$$

再注意到 (2.18) 式以及

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}H^2\boldsymbol{I}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2=\frac{1}{2}\nabla H^2,$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H})=(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H},$$

(2.46) 式又可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\nabla p=\overline{\mu}\Delta\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\mu_0\nabla H^2+\mu_0(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}+\boldsymbol{F},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla\left(p+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)+\mu_0(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}+\overline{\mu}\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}.\tag{2.47}$$

此时正如对纳维 – 斯托克斯方程组一样，如果不需要了解流体内的温度分布，可不考虑能量方程，而得到不可压缩情形的磁流体力学方程组为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0\tag{2.48}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{H},\tag{2.49}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\tag{2.50}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla\left(p+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)+\mu_0(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}+\overline{\mu}\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}.\tag{2.51}$$

其中 (2.48) 可化为对初值的要求，而 $p$ 的求解可相差一个 $t$ 的任意函数.

这是在磁流体力学情形，相应于纳维 – 斯托克斯方程组的方程组.

## §3. 电导率 $\sigma$ 为无穷时的磁流体力学方程组

### 3.1. 电导率 $\sigma$ 为无穷时的磁流体力学方程组

由于等离子体为良导体， $\sigma$ 通常取相当大的数值. 今考察其极限情况： $\sigma=+\infty$. 此时将不出现磁场的扩散现象，而磁流体力学方程

组 (2.37)—(2.41) 可化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{0}, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = &\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\mu}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\\ &+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}((\overline{\mu}' - \frac{2}{3}\overline{\mu})\operatorname{div}\boldsymbol{u})\\ &-\frac{\mu_0}{\rho}(\boldsymbol{H} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{H})_i + F_i \quad (i = 1,2,3),\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \overline{\mu}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}&\\ -(\overline{\mu}' - \frac{2}{3}\overline{\mu})(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2 &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T).\end{aligned} \tag{3.5}$$

利用 (2.45) 式，方程 (3.1) 又可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} - (\boldsymbol{H} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{3.6}$$

下面对 $\sigma = +\infty$ 的电磁流体，说明其两个重要的性质.

### 3.2. 向量场过任一随流体运动的曲面的通量对时间的微分式及其应用

设有一向量场 $\boldsymbol{a}(t, x_1, x_2, x_3)$，而曲面 $S$ 随流体的速度 $\boldsymbol{u}$ (在每一点) 而运动，我们要讨论 $\boldsymbol{a}$ 过 $S$ 沿其法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的通量

$$\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

上述通量随时间 $t$ 的变化由两方面的原因构成. 一是 $\boldsymbol{a}$ 本身随 $t$ 而改变，二是曲面 $S$ 随 $t$ 的变化而变动. 第一部分对总变化率的贡献

显然是

$$\int_S \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S. \tag{3.7}$$

现在计算第二部分对总变化率的贡献. 此时设 $\boldsymbol{a}$ 不变化 (即将时间冻结), 而假设经过时间 $\mathrm{d}t$ 后, $S$ 变到 $S_1$ 的位置. 我们要计算的是

$$\frac{1}{\mathrm{d}t}\left(\int_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S - \int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S\right),$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 对 $S$ 及 $S_1$ 有同一取向.

设 $\Gamma$ 为 $S$ 的边界曲线. 经过 $\mathrm{d}t$ 时间, 它扫过一曲面 $\Sigma$, $\Sigma$ 和 $S$, $S_1$ 一起构成一个封闭曲面 (见图 1). 在此封闭曲面所包围的空间区域 $V$ 上利用格林公式, 得

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \mathrm{d}x = \int_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S - \int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_\Sigma \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}, \tag{3.8}$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u} \mathrm{d}t,$$

而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是 $\Gamma$ 上的有向曲线单元. 显然有

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \mathrm{d}x = \int_S (\operatorname{div} \boldsymbol{a}) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \mathrm{d}t, \tag{3.9}$$

而

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} &= \int_\Gamma \boldsymbol{a} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u} \mathrm{d}t) \\ &= \int_\Gamma (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \mathrm{d}t = \int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.10}$$

这里最后一步利用了斯托克斯公式. 综合 (3.8)—(3.10) 式, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{d}t}\left(\int_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S - \int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S\right) \\ &= \int_S ((\operatorname{div} \boldsymbol{a}) \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a})) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.\end{aligned}$$

将 (3.7) 式与上式给出的贡献合并, 即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + (\operatorname{div} \boldsymbol{a}) \boldsymbol{u} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a})\right) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S. \tag{3.11}$$

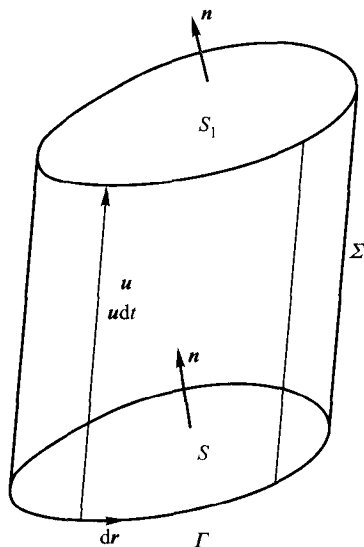



图 1

这就是所要求的公式.

现将上述公式具体应用于 $\sigma=+\infty$ 时的磁场 $\boldsymbol{H}$. 注意到 (3.1)—(3.2) 式, 在 (3.11) 式中取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{H}$, 立即得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0. \tag{3.12}$$

因此, 在 $\sigma=+\infty$ 的情形, 我们得到如下形式的 磁场守恒定律: *在电导率为无穷时, 通过随媒质一起运动的任一曲面 $S$ 的磁通量守恒, 即与时间 $t$ 无关*. 这个结论称 阿尔文定理.

### 3.3. 磁场线“冻结”原理

磁流体力学的基本问题之一是确定导电媒质运动时磁场强度的变化. 这一问题通常可以借助于下述的磁场线“冻结”原理来解决. 这个原理断言: *在 $\sigma=+\infty$ (无限可导) 的情形, 初始时刻分布在同一磁场线上的质点, 在运动过程中会一直保留在同一磁场线上, 即磁场线*

好像“冻结”在物质上.

为证明这一点，由方程 (3.6) 以及连续性方程 (3.3), 容易推出

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{H}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}. \tag{3.13}$$

另一方面，让我们来研究随流体运动的任一曲线. 设在时刻 $t$, 此曲线上有一微元向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 现考察其随时间的变化. 设 $\boldsymbol{u}$ 为在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 始端的流体速度，则在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 末端的流体速度为 $\boldsymbol{u}+(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$. 于是在时间 $\mathrm{d}t$ 内， $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 将变为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}+(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\mathrm{d}t$$

(见图 2). 从而， $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 对时间 $t$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}. \tag{3.14}$$

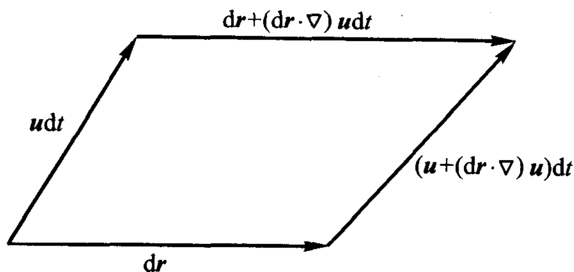



图 2

由 (3.13) 与 (3.14) 式可以看出， $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\rho}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ (对任一固定质点)

满足同一形式的线性齐次常微分方程组. 因此, 若在开始时刻 $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\rho}$ 和 $d\boldsymbol{r}$ 平行, 对任一固定质点有

$$\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}=k\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $k$ 在质点固定时为常数, 则在以后时刻也一定成立同样的关系式. 这样, 在以后时刻, $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\rho}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 也平行, 而且其长度的比例也保持同一数值. 换言之, 若一曲线在开始时刻为磁场线, 则以后在运动过程中仍一直保持为磁场线, 而且 $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\rho}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 间的比例保持不变.

因此, 每一磁场线和该磁场线上的流体质点一起运动, 磁场线仿佛"冻结"在和它一起移动的流体上. 在每一点上, $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\rho}$ 和磁场线的伸长成正比例地改变. 特别, 对不可压缩的流体, $\rho$ 为常数, $\boldsymbol{H}$ 本身和磁场线的伸长成正比例地改变, 即磁场强度随磁场线的拉伸而增强. 综上所述, 我们看到, 可以根据流体运动的情况来描绘磁场的变化情况.

## §4. 磁流体力学方程组的数学结构

在流体存在粘性和热传导 ($\overline{\mu}>0, \overline{\mu}'\geqslant 0, \kappa>0$) 及 $\sigma\neq+\infty$ 的情形, 由方程 (2.40) 与 (2.41) 可以看出, 只要在单纯流体力学的动量方程及能量方程中加上含有 $\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 的关于空间变量的一阶偏导数的项, 即得到磁流体力学的相应方程. 而方程 (2.37) 则为 $\boldsymbol{H}$ 的扩散 (热传导) 方程, 它与 (2.40)—(2.41) 具有主部分离的形式 (不包含 $\boldsymbol{u}$ 及 $T$ 的形如 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 的偏导数). 不难看出, 此时磁流体力学方程组 (2.37) 及 (2.39)—(2.41) 仍是一个一阶 (对称) 双曲方程耦合一个对称抛物方程组, 而且是拟线性的, 故仍为拟线性对称双曲 - 抛物耦合组.

在存在粘性及热传导, 但 $\sigma=+\infty$ 的情形, 能量方程 (2.41) 中不含有 $\boldsymbol{H}$, 动量方程 (2.40) 中有 $\dfrac{\mu_0}{\rho}\boldsymbol{H}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{H}$ 这一含有 $\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{H}$

的关于空间变量的一阶偏导数的项. 此时, 方程 (2.37) 化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{0}, \tag{4.1}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}. \tag{4.2}$$

它是 $\boldsymbol{H}$ 的一阶方程组, 和质量守恒方程 (2.39) 具有类似的形式, 且主部分离. 故此时磁流体力学方程组为由一个主部分离的一阶对称双曲组和一个对称抛物组耦合而成, 仍为拟线性对称双曲 – 抛物耦合组. 只是双曲方程的数目增加, 抛物方程的数目减少.

如果流体中没有任何耗散过程, 此时 $\overline{\mu}=\overline{\mu}'=\kappa=0$, 且 $\sigma=+\infty$, 这种流体称 理想磁流体. 下面重点考察这种情形, 即讨论 理想磁流体力学方程组.

此时, 先将动量方程 (3.4) 写为

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u_1}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\rho u_k\frac{\partial u_1}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_1}\\
&\quad+\mu_0\left(H_2\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)-H_3\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)\right)\\
&\quad=\rho F_1,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u_2}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\rho u_k\frac{\partial u_2}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_2}\\
&\quad+\mu_0\left(H_3\left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2}-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)-H_1\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)\right)\\
&\quad=\rho F_2,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u_3}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\rho u_k\frac{\partial u_3}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_3}\\
&\quad+\mu_0\left(H_1\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)-H_2\left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2}-\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)\right)\\
&\quad=\rho F_3.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

再按第二章 §1 的办法, 将质量守恒方程 (3.3) 写为

$$\frac{1}{\rho\widetilde{c}^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{\rho\widetilde{c}^2}\frac{\partial p}{\partial x_k}=0, \tag{4.6}$$

其中 $\tilde{c}^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$ 为局部音速的平方 (见第二章 (1.32) 式; 这儿用 $\tilde{c}$ 表示局部音速, 是为了避免与光速 $c$ 相混淆). 又将方程 (3.1) 写为

$$\begin{aligned}
&\mu_0 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \mu_0 u_k \frac{\partial H_1}{\partial x_k} \\
&\quad -\mu_0 \left( H_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + H_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \mu_0 H_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\
&\quad = 0, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \mu_0 u_k \frac{\partial H_2}{\partial x_k} \\
&\quad -\mu_0 \left( H_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + H_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \mu_0 H_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\
&\quad = 0, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_0 \frac{\partial H_3}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \mu_0 u_k \frac{\partial H_3}{\partial x_k} \\
&\quad -\mu_0 \left( H_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + H_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \mu_0 H_3 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\
&\quad = 0, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

而能量方程 (3.5) 则可简单地用以下的熵守恒方程代替

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial S}{\partial x_k} = 0. \qquad (4.10)$$

这样, 若以 $(u_1, u_2, u_3, p, H_1, H_2, H_3, S)$ 为未知函数, 将理想磁流体力学方程组按上述次序排列, 那么该方程组 (4.3)—(4.10) 可写为如下的向量形式

$$A_0 \frac{\partial U}{\partial t} + A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = C, \qquad (4.11)$$

其中

$$\begin{aligned}
U &= (u_1, u_2, u_3, p, H_1, H_2, H_3, S)^{\mathrm{T}}, \\
A_0 &= \mathrm{diag}\{\rho, \rho, \rho, \rho^{-1}\tilde{c}^{-2}, \mu_0, \mu_0, \mu_0, 1\},
\end{aligned}$$

$$
A_1 = \begin{pmatrix}
\rho u_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu_0 H_2 & \mu_0 H_3 & 0 \\
0 & \rho u_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 H_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho u_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 H_1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \frac{u_1}{\rho \tilde{c}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_0 H_2 & -\mu_0 H_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\
\mu_0 H_3 & 0 & -\mu_0 H_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1
\end{pmatrix},
$$

$$
A_2 = \begin{pmatrix}
\rho u_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 H_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \rho u_2 & 0 & 1 & \mu_0 H_1 & 0 & \mu_0 H_3 & 0 \\
0 & 0 & \rho u_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 H_2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{u_2}{\rho \tilde{c}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mu_0 H_2 & \mu_0 H_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 \\
0 & \mu_0 H_3 & -\mu_0 H_2 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2
\end{pmatrix},
$$

$$
A_3 = \begin{pmatrix}
\rho u_3 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 H_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \rho u_3 & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 H_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho u_3 & 1 & \mu_0 H_1 & \mu_0 H_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{u_3}{\rho \tilde{c}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mu_0 H_3 & 0 & \mu_0 H_1 & 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mu_0 H_3 & \mu_0 H_2 & 0 & 0 & u_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3
\end{pmatrix},
$$

而

$$
C = (\rho F_1, \rho F_2, \rho F_3, 0, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.
$$

容易看出，在不出现真空的区域 ($\rho \neq 0$) 中， $A_0$ 为对称正定阵，而 $A_1$, $A_2$, $A_3$ 均为对称阵，因而理想磁流体力学方程组 (4.11) 是一个一阶拟线性对称双曲组.

以上是在解为连续可微的范围中考虑的. 但是由于电磁激波的存在，还必须考虑间断解. 为此必须利用守恒律形式的方程组.

对理想磁流体，方程组 (2.32)—(2.36) 化为如下形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - p\boldsymbol{I}) - \mu_0 \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} = \rho \boldsymbol{F}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{u})\\ &\quad -\operatorname{div}(\mu_0(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}) = \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u},\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{0}, \tag{4.15}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{4.16}$$

如前所述， (4.16) 式可化为对初始条件的要求，我们只需着重讨论 (4.12)—(4.15) 式. 方程 (4.13) 中的 $\mu_0 \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ 不具有散度的形式，所以该方程不具有守恒律形式. 但由 (2.15) 式，易知 (4.13) 可改写为如下守恒律的形式：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k - \mu_0 H_i H_k)\\ &+\frac{\partial}{\partial x_i}(p + \frac{1}{2}\mu_0 H^2) = \rho F_i \quad (i = 1, 2, 3).\end{aligned} \tag{4.17}$$

这样，理想磁流体力学方程组 (4.12) 、 (4.17) 、 (4.14) 及 (4.15) 就是一个守恒律形式的一阶拟线性偏微分方程组.

那么，上述方程组能否通过引进新的未知函数化为仍具有守恒律形式的一阶对称双曲组呢？借助于第二章 §1 中对单纯理想流体力学方程组所用的方法，是可以作到这一点的. 有兴趣的读者可参考文献 [7].

## §5. 一维磁流体力学方程组

### 5.1. 一维磁流体力学方程组

当磁流体力学方程组中出现的量只依赖于时间 $t$ 与一个空间变量 (如 $x_1$) 时，称该方程组为一维的. 一般来说，此时我们不能像在流体力学中那样，期望流体仅沿 $x_1$ 方向流动，即其速度在 $x_2$ 及 $x_3$ 方向的分量为零，因为如果如此，那么磁场的分量 $H_2$ 及 $H_3$ 一般会依赖于 $x_2$ 及 $x_3$.

为简单起见，记 $x_1$ 为 $x$. 此时方程 (2.38) 化为

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0, \tag{5.1}$$

即 $H_1$ 与 $x$ 无关. 由此易知，方程组 (2.37) 中的第一个方程化为

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 0, \tag{5.2}$$

因而 $H_1$ 恒为常数. 这样方程组 (2.37) 中的其余两个方程可以写为

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial H_2}{\partial x} + H_2\frac{\partial u_1}{\partial x} - H_1\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} + u_1\frac{\partial H_3}{\partial x} + H_3\frac{\partial u_1}{\partial x} - H_1\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{\partial^2 H_3}{\partial x^2}. \tag{5.4}$$

此外，描述流体运动的方程组 (2.39)—(2.41) 此时可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &+ u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{4}{3}\overline{\mu} + \overline{\mu}')\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \\ &+\frac{\mu_0}{\rho}\left(H_2\frac{\partial H_2}{\partial x} + H_3\frac{\partial H_3}{\partial x}\right) = F_1,\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - \frac{\mu_0}{\rho}H_1\frac{\partial H_2}{\partial x} = F_2, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\mu}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)-\frac{\mu_0}{\rho}H_1\frac{\partial H_3}{\partial x}=F_3, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}&\rho T\frac{\partial S}{\partial t}+\rho T u_1\frac{\partial S}{\partial x}-(\frac{4}{3}\overline{\mu}+\overline{\mu}')\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2-\overline{\mu}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2\\&\quad-\overline{\mu}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{5.9}$$

特别，对理想磁流体，即 $\overline{\mu}=\overline{\mu}'=\kappa=0$，而 $\sigma=+\infty$ 的情形，我们得到

$$\frac{\partial H_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial H_2}{\partial t}+H_2\frac{\partial u_1}{\partial x}-H_1\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial t}+u_1\frac{\partial H_3}{\partial x}+H_3\frac{\partial u_1}{\partial x}-H_1\frac{\partial u_3}{\partial x}=0, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_1\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u_1}{\partial x}=0, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\tilde{c}^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}\\&\quad+\frac{\mu_0}{\rho}\left(H_2\frac{\partial H_2}{\partial x}+H_3\frac{\partial H_3}{\partial x}\right)=F_1,\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\mu_0}{\rho}H_1\frac{\partial H_2}{\partial x}=F_2, \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\mu_0}{\rho}H_1\frac{\partial H_3}{\partial x}=F_3, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u_1\frac{\partial S}{\partial x}=0, \tag{5.16}$$

其中 $\tilde{c}^2=\dfrac{\partial p}{\partial \rho}$.

令

$$U=(H_2,H_3,\rho,u_1,u_2,u_3,S)^{\mathrm{T}},$$

上述方程组又可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A(U)\frac{\partial U}{\partial x}=C, \tag{5.17}$$

其中

$$A(U)=\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & H_2 & -H_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & H_3 & 0 & -H_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_0}{\rho}H_2 & \frac{\mu_0}{\rho}H_3 & \frac{\tilde{c}^2}{\rho} & u_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial S} \\ -\frac{\mu_0}{\rho}H_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\rho}H_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

而

$$C=(0,0,0,F_1,F_2,F_3,0)^{\mathrm{T}}.$$

自然，我们可以像 §4 中那样，将方程组 (5.17) 改写为一个对称双曲组，但现在我们要针对一维情形的特点，从另一角度来考察其双曲性．首先讨论由 (5.18) 式给出的矩阵 $A(U)$ 的特征值的情况．由

$$\det(A(U)-\lambda I)$$
$$=\begin{vmatrix} u_1-\lambda & 0 & 0 & H_2 & -H_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1-\lambda & 0 & H_3 & 0 & -H_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_1-\lambda & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_0}{\rho}H_2 & \frac{\mu_0}{\rho}H_3 & \frac{\tilde{c}^2}{\rho} & u_1-\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial S} \\ -\frac{\mu_0}{\rho}H_1 & 0 & 0 & 0 & u_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{\rho}H_1 & 0 & 0 & 0 & u_1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=0,$$

经过计算可得

$$(u_1-\lambda)\left((u_1-\lambda)^2-\frac{\mu_0}{\rho}H_1^2\right)\{((u_1-\lambda)^2-\tilde{c}^2)$$
$$\cdot((u_1-\lambda)^2-\frac{\mu_0}{\rho}H_1^2)-\frac{\mu_0}{\rho}(u_1-\lambda)^2(H_2^2+H_3^2)\}=0.$$

故有

$$u_1 - \lambda = 0 \tag{5.19}$$

或

$$(u_1 - \lambda)^2 - \frac{\mu_0}{\rho} H_1^2 = 0 \tag{5.20}$$

或

$$\begin{aligned} &((u_1 - \lambda)^2 - \tilde{c}^2)((u_1 - \lambda)^2 - \frac{\mu_0}{\rho} H_1^2) \\ &-\frac{\mu_0}{\rho}(u_1 - \lambda)^2 (H_2^2 + H_3^2) = 0. \end{aligned}$$

上式又可写为

$$(u_1 - \lambda)^4 - (\tilde{c}^2 + \frac{\mu_0}{\rho} H^2)(u_1 - \lambda)^2 + \frac{\mu_0 \tilde{c}^2}{\rho} H_1^2 = 0. \tag{5.21}$$

由 (5.19) 、 (5.20) 和 (5.21) 式，得 $A(U)$ 的特征值为

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = u_1 - C_f, \quad \lambda_2 = u_1 - C_a, \quad \lambda_3 = u_1 - C_s, \\ &\lambda_4 = u_1, \quad \lambda_5 = u_1 + C_s, \quad \lambda_6 = u_1 + C_a, \\ &\lambda_7 = u_1 + C_f, \end{aligned} \tag{5.22}$$

其中

$$\begin{aligned} C_a^2 &= \frac{\mu_0}{\rho} H_1^2, \\ C_{f,s}^2 &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{c}^2 + \frac{\mu_0}{\rho} H^2 \pm \sqrt{(\tilde{c}^2 + \frac{\mu_0}{\rho} H^2)^2 - \frac{4\mu_0 \tilde{c}^2}{\rho} H_1^2}\right\}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

而在上式中，取 “+” 号给出 $C_f$, 取 “−” 号给出 $C_s$. 这样，我们就得到 $A(U)$ 的七个实特征值. 不难直接验证

$$C_s^2 \leqslant C_a^2 \leqslant C_f^2. \tag{5.24}$$

$C_f$, $C_s$ 及 $C_a$ 分别称为快、慢及阿尔文特征速度.

若 $H_1 \neq 0$ 且 $H_2^2 + H_3^2 \neq 0$, 可以验证在 (5.24) 式中成立着严格的不等号，即有

$$0 < C_s^2 < C_a^2 < C_f^2 \tag{5.25}$$

(见习题 7). 此时，上面给出的七个特征值互不相等，所以一阶拟线性方程组 (5.17) 是严格双曲型的.

若 $H_1 = 0$ 或 $H_2 = H_3 = 0$, 那么矩阵 $A(U)$ 有重特征值. 在此我们只讨论 $H_1 = 0$ 的情形，此时

$$\lambda_1 = u_1 - \sqrt{\widetilde{c}^2 + \frac{\mu_0}{\rho}H^2}, \quad \lambda_7 = u_1 + \sqrt{\widetilde{c}^2 + \frac{\mu_0}{\rho}H^2},$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = u_1,$$

而 $\lambda = u_1$ 为五重特征根. 下面我们说明，即便如此，对于上述七个特征值，其相应的左特征向量仍构成一个完全组. 这里， $A(U)$ 相应于特征值 $\lambda$ 的左特征 (行) 向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 由下式定义:

$$\boldsymbol{\zeta}A = \lambda\boldsymbol{\zeta}.$$

为证明左特征向量组的完全性，只需讨论重特征 $\lambda = u_1$ 的情形. 设

$$\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_7)$$

为相应于 $\lambda = u_1$ 的左特征向量，则应有

$$(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_7)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_0}{\rho}H_2 & \frac{\mu_0}{\rho}H_3 & \frac{\widetilde{c}^2}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

由此得

$$\zeta_4 = 0,$$
$$H_2\zeta_1 + H_3\zeta_2 + \rho\zeta_3 = 0.$$

故有五个线性独立的左特征向量

$$
\begin{aligned}
&(1,0,-\frac{1}{\rho}H_2,0,0,0,0),\\
&(0,1,-\frac{1}{\rho}H_3,0,0,0,0),\\
&(0,0,0,0,1,0,0),\\
&(0,0,0,0,0,1,0),\\
&(0,0,0,0,0,0,1).
\end{aligned}
$$

所以此时矩阵 $A(U)$ 仍有七个线性独立的左特征向量. 根据第二章 §1.4 中关于一个空间变量的一阶拟线性双曲型方程组的定义, 方程组 (5.17) 此时仍是双曲型的. 但由于有重特征值, 方程组不再是严格双曲型的.

综上所述, 我们得到, 当 $H_1 \neq 0$ 且 $H_2^2+H_3^2 \neq 0$ 时, 一维理想磁流体力学方程组为严格双曲型的; 而当 $H_1=0$ 时, 其系数阵 $A(U)$ 虽有一个五重特征值, 但此时左特征向量仍构成一个完全组, 因而此时方程组亦是双曲型的.

### 5.2. 一维磁流体力学方程组的拉格朗日形式

对于一维磁流体力学方程组, 虽然 $u_2, u_3$ 不一定为零, 但仍可像第二章 §5 中那样, 由连续性方程 (5.5) 出发, 引入拉格朗日坐标 $(t', m)$. 利用变换法则 (参见第二章 (5.9)—(5.10) 式)

$$
\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-\rho u_1\frac{\partial}{\partial m},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\rho\frac{\partial}{\partial m},
$$

由 (5.3)—(5.9) 可得一维磁流体力学方程组的拉格朗日形式如下:

$$
\frac{\partial \tau}{\partial t'}-\frac{\partial u_1}{\partial m}=0, \tag{5.26}
$$

$$
\frac{\partial H_2}{\partial t'}+\rho H_2\frac{\partial u_1}{\partial m}-\rho H_1\frac{\partial u_2}{\partial m}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\rho\frac{\partial}{\partial m}\left(\rho\frac{\partial H_2}{\partial m}\right), \tag{5.27}
$$

$$
\frac{\partial H_3}{\partial t'}+\rho H_3\frac{\partial u_1}{\partial m}-\rho H_1\frac{\partial u_3}{\partial m}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\rho\frac{\partial}{\partial m}\left(\rho\frac{\partial H_3}{\partial m}\right), \tag{5.28}
$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t'}+\frac{\partial p}{\partial m}-\frac{\partial}{\partial m}((\frac{4}{3}\overline{\mu}+\overline{\mu}')\rho\frac{\partial u_1}{\partial m})$$
$$+\mu_0\left(H_2\frac{\partial H_2}{\partial m}+H_3\frac{\partial H_3}{\partial m}\right)=F_1, \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t'}-\frac{\partial}{\partial m}\left(\overline{\mu}\rho\frac{\partial u_2}{\partial m}\right)-\mu_0H_1\frac{\partial H_2}{\partial m}=F_2, \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t'}-\frac{\partial}{\partial m}\left(\overline{\mu}\rho\frac{\partial u_3}{\partial m}\right)-\mu_0H_1\frac{\partial H_3}{\partial m}=F_3, \tag{5.31}$$

$$T\frac{\partial S}{\partial t'}-(\frac{4}{3}\overline{\mu}+\overline{\mu}')\rho\left(\frac{\partial u_1}{\partial m}\right)^2-\overline{\mu}\rho\left(\frac{\partial u_2}{\partial m}\right)^2$$
$$-\overline{\mu}\rho\left(\frac{\partial u_3}{\partial m}\right)^2=\frac{\partial}{\partial m}\left(\kappa\rho\frac{\partial T}{\partial m}\right). \tag{5.32}$$

特别，对理想磁流体，得到其拉格朗日形式的方程组为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t'}-\frac{\partial u_1}{\partial m}=0, \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t'}+\rho H_2\frac{\partial u_1}{\partial m}-\rho H_1\frac{\partial u_2}{\partial m}=0, \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial t'}+\rho H_3\frac{\partial u_1}{\partial m}-\rho H_1\frac{\partial u_3}{\partial m}=0, \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial m}\left(p+\frac{1}{2}\mu_0(H_2^2+H_3^2)\right)=F_1, \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t'}-\mu_0H_1\frac{\partial H_2}{\partial m}=F_2, \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t'}-\mu_0H_1\frac{\partial H_3}{\partial m}=F_3, \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t'}=0. \tag{5.39}$$

这个方程组相对来说，具有比较简单的形式.

## 习 题

1. 设磁场 $\boldsymbol{H}$ 只有一个非零分量，试证明

$$(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}.$$

2. 设定常 (即 $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{0}$) 、不可压缩 (设 $\rho\equiv 1$) 的理想流体所受的体积力仅为重力. 又设磁场满足条件: $(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$. 若取 $x_3$ 为由地面开始并指向上方的铅直坐标, 试证明: 沿流线成立

$$\frac{u^2}{2}+p+\frac{1}{2}\mu_0 H^2+gx_3=C,$$

其中 $g$ 为重力加速度, $C$ 沿同一流线为常数.

3. 设 $\phi$ 及 $\boldsymbol{A}$ 分别为电磁场的标势与矢势 (见第一章 §6). 试证明: 若 $\phi$ 与 $\boldsymbol{A}$ 满足条件

$$\phi+\frac{1}{\sigma\mu_0}\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0,$$

则方程 (2.32) 可写为如下的形式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=\boldsymbol{u}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\boldsymbol{A}.$$

4. 试证明: 对理想磁流体, 能量守恒方程 (4.14) 可以写为如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{1}{2}\mu_0 H^2)+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\{\rho u_k(e+\frac{1}{2}u^2-\frac{p}{\rho})\\ +\mu_0 u_k H^2-\mu_0 H_k(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{H})\}=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

5. 试将一维理想磁流体力学方程组 (5.10)—(5.16) 化为一阶拟线性对称双曲组的形式.

6. 试讨论拉格朗日形式下的一维理想磁流体力学方程组 (5.33)—(5.39) 的类型.

7. 证明: 当 $H_1\neq 0$ 且 $H_2^2+H_3^2\neq 0$ 时, 快、慢及阿尔文特征速度 $C_f, C_s$ 及 $C_a$ 满足

$$0<C_s^2<C_a^2<C_f^2.$$

## 参考文献

[1] 柯林 T G. 电磁流体力学. 唐戈, 郭均译. 北京: 科学出版社, 1960

[2] 复旦大学数学系. 连续介质力学. 上海: 上海科学技术出版社, 1960

[3] 朗道 L D, 栗弗席兹 E M. 连续媒质电动力学. 周奇译. 北京: 人民教育出版社, 1963

[4] 胡文瑞. 宇宙磁流体力学. 北京: 科学出版社, 1987

[5] Polovin R V, Demutskii V P. *Fundamentals of Magnetohydrodynamics*. New York: Consultants Bureau, 1990

[6] Moreau R. *Magnetohydrodynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990

[7] Godounov S K. *Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques*. Nonlinear Hyperbolic Problems. Eds. C. Carasso, P.-A. Raviat and D. Serre, Lecture Notes in Mathematics 1270, Springer–Verlag, 1987, 135～149

# 第四章　反应流体力学

## §1. 引　言

在本章中将从一般的角度来讨论燃烧现象. 具体地说, 讨论可燃流体在流动过程中同时伴随着燃烧现象的情况. 这是现今应用数学领域, 包括应用偏微分方程及计算数学方面的热门研究课题, 在理论及应用两方面都具有重要的意义. 为了揭示燃烧现象的机理及规律, 有不少人从事这方面的研究, 并且召开过多次国际性的学术会议. 到目前为止, 这仍是一个方兴未艾的课题.

燃烧现象有一些很有趣的规律. 设想在一管道中充满了可燃气体, 并在其一端点火. 在正常的情况下, 火焰以每秒几米的低速向前传播, 称为 *爆燃* (deflagration); 但在某些情况下, 缓慢的燃烧会变为一个很快的过程, 火焰将以每秒 2000 米甚至更高的惊人速度向前传播, 称为 *爆炸* (detonation).

有两种如此不同类型的燃烧传播过程, 是一种很使人奇怪的现象, 但它们都是从实验中观察到的. 不仅对气体, 而且对固体炸药, 均可以观察到类似的现象.

1899 年查普曼 (Chapman) 及 1905 年儒盖 (Jouquet) 对上述现象给出了一个简化的但令人信服的解释, 为燃烧理论奠定了一个基础. 他们的简化假设认为化学反应过程是瞬时发生并完成的, 即有一波前进入未燃气体, 并瞬时地将它变为已燃气体. 考虑在这一过程中的质量、动量及能量守恒定律, 并注意到已燃气体与未燃气体的化学性质不同, 即具有不同的化学能 (原子在分子内部的能量), 因而需对总能量表达式及动量平衡条件加以适当的修正. 经过复杂的计算, 可以解释上述现象 (参见 [1]).

但是, 查普曼 - 儒盖的假设是极度理想化的. 它对爆炸来说一般可以认为是满足的, 但对缓慢的燃烧 (爆燃) 则很难满足. 一般来说, 在燃烧过程中, 流体微团通常总是未燃气体与已燃气体的混合物, 而不能假设已燃和未燃部分有一明显分界线. 为了进一步揭示燃烧现象的

规律，必须从考察包含化学反应过程的流体力学这一总的框架入手，再结合具体的特点加以阐明．这一任务远未完成．本章中着重对这一总的框架建立相应的偏微分方程组，为进一步的研究打下基础．

## §2. 反应流体力学方程组

### 2.1. 粘性热传导反应流体力学方程组

现在对具有粘性及热传导性的反应流体建立相应的方程组．

和普通情形不同，由于燃烧 (化学反应), 在流动过程中的流体微团通常由已燃部分和未燃部分混合而成，我们要对这种混合的流体建立方程．一个简单的方法是将这种混合气体作为一个整体来考察，引入相应的密度 $\rho$, 速度 $\boldsymbol{u}$ (设两部分以同一宏观速度运动), 压强 $p$ 等．同时再引入一个函数 $Z=Z(t,\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3))$ 表示未燃流体在微团中所占的百分比，以区分这两种流体，并描述从未燃到已燃的转化．显然有

$$0\leqslant Z\leqslant 1, \tag{2.1}$$

而 $Z=1$ 表示完全未燃烧， $Z=0$ 则表示完全燃烧．

这儿有几点需要注意：

1) 因为在燃烧过程中，通过化学反应要释放出能量，这一能量是从未燃气体的化学能中转化过来的，因此和以往只考虑单位质量的内能 (分子的动能及势能) 不同，此时还要考虑化学能，即原子在分子中的能量．于是代替原先的内能 $e$, 现在要引入 完全能

$$E=e+g, \tag{2.2}$$

其中 $g$ 表示单位质量的化学能．通常燃烧过程是放热的，故已燃流体的化学能小于未燃气体的化学能．在讨论能量守恒定律时，要考虑的是完全能．

2) 流体的状态方程一般和未燃流体所占的比例 $Z$ 有关．因为 $Z$ 不同，构成的混合流体也不同．这样，应有

$$p=p(\rho,T,Z) \tag{2.3}$$

等；而完全能 $E$ 也同样与 $Z$ 有关，应有

$$E=E(\rho,T,Z) \tag{2.4}$$

等. 当 $Z=1$ 时, 就化为未燃流体的状态方程; 而当 $Z=0$ 时, 则化为已燃流体的状态方程. 这些状态方程的具体形式是有待建立的, 将在下面进一步加以说明.

现在来建立反应流体力学方程组.

质量守恒定律及动量守恒定律仍为原来的形式 (对混合流体)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u})+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P})=\rho\boldsymbol{F} \tag{2.6}$$

(见第二章的 (2.22) 及 (2.23) 式), 其中 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 由第二章中 (2.20) 式给出. 而在能量守恒定律中, 则要将 $e$ 改为 $E$, 即有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho E+\frac{1}{2}\rho u^2)+\operatorname{div}((\rho E+\frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{u})\\ =\;&\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{2.7}$$

(见第二章的 (2.29) 式).

除以上方程外, 还需一个对未燃流体的质量平衡方程, 以用来决定 $Z$.

任一给定区域 $\Omega$ 上未燃流体在时段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中质量的增加为

$$\int_\Omega\rho Z(t+\mathrm{d}t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x-\int_\Omega\rho Z(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

其中 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$. 它应等于在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中通过边界 $S$ 流入 $\Omega$ 中的未燃流体质量 I, 减去这段时间中由于燃烧而减少的未燃流体质量 Ⅱ. 由质量密度向量的定义,

$$\mathrm{I}=-\int_S\rho Z\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=-\int_\Omega\operatorname{div}(\rho Z\boldsymbol{u})\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

另一方面, 在任一流体微元 $\mathrm{d}x$ 内、在时段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中燃烧的未燃流体质量应与时间 $\mathrm{d}t$ 及未燃流体的质量 $\rho Z\mathrm{d}x$ 成正比, 其比例系数记为 $\overline{k}$, 它反映了反应率, 可能与 $\rho$, $p$, $Z$ 有关. 于是

$$\mathrm{II}=\int_\Omega\overline{k}(\rho,p,Z)\rho Z\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

这样，由 (2.8)—(2.10) 式得到

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= -\int_{\Omega}\mathrm{div}\,(\rho Z\boldsymbol{u})\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\Omega}\overline{k}(\rho,p,Z)\rho Z\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

由 $\Omega$ 的任意性，即得反映未燃流体质量平衡的方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z) + \mathrm{div}\,(\rho Z\boldsymbol{u}) = -\overline{k}(\rho,p,Z)\rho Z. \tag{2.12}$$

这样，我们就得到反应流体力学方程组

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}) = \rho\boldsymbol{F}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E + \frac{1}{2}\rho u^2) + \mathrm{div}\,((\rho E + \frac{1}{2}\rho u^2)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{u})$$
$$= \mathrm{div}\,(\kappa\,\mathrm{grad}\,T) + \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z) + \mathrm{div}\,(\rho Z\boldsymbol{u}) = -\overline{k}(\rho,p,Z)\rho Z, \tag{2.16}$$

其中未知函数例如可取为 $\rho$, $\boldsymbol{u}$, $T$ 及 $Z$. 再附上状态方程

$$p = p(\rho,T,Z), \tag{2.17}$$

$$E = E(\rho,T,Z), \tag{2.18}$$

(2.13)—(2.16) 就构成一个封闭的方程组.

### 2.2. 反应流体力学方程组形式的化约

如同无化学反应的情况那样，利用连续性方程 (2.13)，可将动量方程 (2.14) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\mu' - \frac{2}{3}\mu)\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) + F_i \quad (i=1,2,3), \tag{2.19}$$

其中如同第二章中那样，记

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

而方程 (2.16) 亦可利用连续性方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-\overline{k}(\rho,p,Z)Z. \tag{2.20}$$

能量方程 (2.15) 在利用连续性方程 (2.13) 及动量方程 (2.15) 后可化为

$$\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+p\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\mu\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\\-(\mu'-\frac{2}{3}\mu)(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2=\mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\,T).\end{aligned} \tag{2.21}$$

再利用连续性方程，上式又可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+p\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}-\frac{\mu}{\rho}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\\-\frac{1}{\rho}(\mu'-\frac{2}{3}\mu)(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2=\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(\kappa\,\mathrm{grad}\,T).\end{aligned} \tag{2.22}$$

由热力学 (见附录二或第二章中的 (1.26) 式) 知，对固定的 $Z$ 值 (即对固定比例的混合气体)，熵 $S=S(\rho,T,Z)$ 满足

$$T\mathrm{d}_ZS=\mathrm{d}e+p\mathrm{d}\tau. \tag{2.23}$$

上式中固定 $Z$ 作为参数，而 $\mathrm{d}_ZS$ 表示固定 $Z$ 时对 $S$ 的微分. 注意到当 $Z$ 固定时，化学能 $g$ 不变，故 $\mathrm{d}E=\mathrm{d}e$, 从而 (2.23) 式可写为

$$T\mathrm{d}_ZS=\mathrm{d}E+p\mathrm{d}\tau. \tag{2.24}$$

于是，考虑到 $Z$ 的变化，并利用 (2.20) 式，有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_ZS}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial S}{\partial Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_ZS}{\mathrm{d}t}-f(\rho,p,Z)Z, \tag{2.25}$$

其中记

$$f(\rho,p,Z)=\frac{\partial S}{\partial Z}\overline{k}(\rho,p,Z). \tag{2.26}$$

利用 (2.24)—(2.25) 式，能量方程 (2.22) 又可写为

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}-\frac{\mu}{\rho}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}(\mu'-\frac{2}{3}\mu)(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2$$
$$=\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)-\widetilde{f}(\rho,p,Z)Z, \tag{2.27}$$

其中

$$\widetilde{f}(\rho,p,Z)=f(\rho,p,Z)T. \tag{2.28}$$

这样，反应流体力学方程组又可写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{2.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-\overline{k}(\rho,p,Z)Z, \tag{2.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\mu'-\frac{2}{3}\mu)\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)+F_i\quad(i=1,2,3), \tag{2.31}$$

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}-\frac{\mu}{\rho}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}(\mu'-\frac{2}{3}\mu)(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2$$
$$=\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)-\widetilde{f}(\rho,p,Z)Z. \tag{2.32}$$

特别，在忽略粘性及热传导性的情况下，相应的方程组可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{2.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=-\overline{k}(\rho,p,Z)Z, \tag{2.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=\boldsymbol{F}, \tag{2.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-f(\rho,p,Z)Z, \tag{2.36}$$

其中 $f$ 由 (2.26) 式给出.

### 2.3. 混合气体的状态方程

仍考虑多方气体的情况. 对单一气体, 我们知道 (见附录二)

$$p = (\gamma-1)\exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right)\rho^{\gamma}, \tag{2.37}$$

$$e = \exp\left(\frac{S-S_0}{c_V}\right)\rho^{\gamma-1}, \tag{2.38}$$

其中 $\gamma > 1$. 于是有

$$p = (\gamma-1)\rho e. \tag{2.39}$$

对于混合气体, 有 $E = e + g$. 假设已燃气体的化学能为零, 未燃气体的化学能为 $g_0$, 对具 $Z$ 值的混合气体, 可以设

$$E = e + Zg_0. \tag{2.40}$$

从而由 (2.39) 式, 该气体的状态方程为

$$p = (\gamma-1)\rho(E - Zg_0), \tag{2.41}$$

其中 $\gamma > 1$, 而 $g_0 > 0$ 为单位质量未燃气体完全燃烧后所释放出来的化学能, 为一常数.

这儿我们假设 $\gamma > 1$ 与 $Z$ 无关; 特别, 对已燃及未燃气体, 取同一 $\gamma$ 值. 这是采用了丘林 (A. Chorin), 柯莱拉 (P. Colella) 、马依达 (A. Majda) 与罗依伯德 (V. Roytburd) 等学者在研究燃烧问题时所用的假设 (见 [2], [3]). 对于更为接近实际的情形, $\gamma$ 可以依赖于 $Z : \gamma = \gamma(Z)$.

温度 $T$ 可由

$$p = R\rho T \tag{2.42}$$

决定. 注意到 (2.39)—(2.40) 式, 有

$$T = \frac{(\gamma-1)e}{R} = \frac{(\gamma-1)}{R}(E - Zg_0). \tag{2.43}$$

现在来推导熵的表达式. 由于在固定 $Z$ 时, 有

$$\mathrm{d}E + p\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{d}e + \frac{(1-\gamma)}{\rho} e\mathrm{d}\rho \\
&= \rho^{\gamma-1}\mathrm{d}(\rho^{1-\gamma}e) \\
&= \frac{(\gamma-1)e}{R}\mathrm{d}\left(\frac{R}{\gamma-1}\ln(\rho^{1-\gamma}e)\right) \\
&= T\mathrm{d}\left(\frac{R}{\gamma-1}\ln(\rho^{1-\gamma}e)\right).
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

在上面的推导中，我们利用了 (2.43) 式. 比较 (2.24) 及 (2.44) 式可以看出，熵 $S$ 可取为

$$S = \frac{R}{\gamma-1}\ln(\rho^{1-\gamma}e) + S_0,$$

即

$$S = \frac{R}{\gamma-1}\ln(\rho^{1-\gamma}(E - Zg_0)) + S_0, \tag{2.45}$$

其中 $S_0$ 为一个常数.

在以上推导过程中，均设 $Z$ 为固定，因此上述公式在 $\gamma = \gamma(Z)$ 时仍然成立.

在以上的状态方程 (2.41) 、 (2.43) 及 (2.45) 中， $p, T$ 及 $S$ 均表示为 $\rho, E, Z$ 的函数. 因此，反应流体力学方程组的未知函数可取为 $\rho, E, Z$ 及 $\boldsymbol{u}$.

下面看反应率函数 $\overline{k}(\rho, p, Z)$ 的表达式. 流体能否燃烧需要有一定的温度. 设 $T_c$ 为临界温度 (燃点), 只有当 $T > T_c$ 时，流体才能燃烧. 按丘林及上述另外三位作者的建议，简单地可设

$$\overline{k} = KH(T - T_c), \tag{2.46}$$

其中 $K > 0$ 为常数，而

$$H(T) = \begin{cases} 1, & T > 0, \\ 0, & T \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

为赫维赛德 (Heaviside) 函数. 这样，由 (2.26) 式，并注意到 (2.45) 式，有

$$f(\rho, p, Z) = \frac{\partial S}{\partial Z}\overline{k}(\rho, p, Z)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{R}{\gamma-1}\frac{g_0}{(E-Zg_0)}\overline{k}(\rho,p,Z) \\
&= -\frac{Kg_0}{T}H(T-T_c). \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

它如同 $\overline{k}$ 一样，也是一个具有间断性的函数. 由 (2.28) 式并有

$$
\widetilde{f}(\rho,p,Z) = -Kg_0H(T-T_c). \qquad (2.49)
$$

### 2.4. 反应流体力学方程组的数学结构

在有粘性及热传导的情形，尽管此时 $p$ 及 $S$ 为 $\rho$, $T$, $Z$ 的函数，而不仅仅为 $\rho$, $T$ 的函数，但动量及能量方程 (2.31)—(2.32) 仍可像第二章中那样写为对称抛物组，而连续性方程 (2.29) 及描述未燃流体质量平衡的方程 (2.30) 则为两个主部分离的一阶方程. 故该方程组仍为一个拟线性对称双曲－抛物耦合组. 但由上段讨论可知，其右端函数可能具有间断.

下面我们说明，在不计粘性及热传导性的情形，上述方程组仍构成一个一阶拟线性对称双曲组. 为此取 $\boldsymbol{u}$, $p$, $S$ 及 $Z$ 为未知函数. 将质量方程 (2.33)、熵方程 (2.36) 及对 $Z$ 的方程 (2.34) 联合，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial \rho}{\partial x_k}+\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \\
&\quad+\frac{\partial p}{\partial S}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial S}{\partial x_k}+f(\rho,p,Z)Z\right) \\
&\quad+\frac{\partial p}{\partial Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial Z}{\partial x_k}+\overline{k}(\rho,p,Z)Z\right)=0.
\end{aligned}
$$

由此即得

$$
\frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial p}{\partial x_k}+\rho c^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = -G(\rho,p,Z)Z, \qquad (2.50)
$$

其中 $c^2=\dfrac{\partial p}{\partial \rho}$, 而

$$
G(\rho,p,Z)=\frac{\partial p}{\partial S}f(\rho,p,Z)+\frac{\partial p}{\partial Z}\overline{k}(\rho,p,Z). \qquad (2.51)
$$

上式又可写为

$$\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial x_k}=\widetilde{G}(\rho,p,Z)Z, \tag{2.52}$$

其中

$$\widetilde{G}(\rho,p,Z)=G(\rho,p,Z)/\rho c^2. \tag{2.53}$$

(2.52) 和第二章 (1.32) 式有类似的形式，但其右端可能具有间断. 它可用来代替质量方程 (2.33).

将上述方程组按动量方程 (2.35)、质量方程 (2.52)、熵方程 (2.36) 及 $Z$ 的方程 (2.34) 的次序排列，则不难看出它是一个一阶拟线性对称双曲组，但可能具有间断的右端项.

## §3. 一维反应流体力学方程组

### 3.1. 一维反应流体力学方程组

现考虑流体在管道内的一维流动. 设流动方向为 $x=x_1$, 此时 $u=u_1$, $u_2=u_3=0$, 而所有状态量均与 $x_2$, $x_3$ 无关，只是 $t$, $x$ 的函数.

这样，方程组 (2.13)—(2.16) 化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\left((\rho u^2+p-(\frac{4}{3}\mu+\mu')\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho F, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E+\frac{1}{2}\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial x}\left((\rho E+\frac{1}{2}\rho u^2+p)u\right.$$
$$\left.-(\frac{4}{3}\mu+\mu')u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\rho F u, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho Z u)=-\overline{k}(\rho,p,Z)\rho Z. \tag{3.4}$$

或者由 (2.29)—(2.32) 式，可将其改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left((\frac{4}{3}\mu+\mu')\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F, \tag{3.6}$$

$$T\frac{\partial S}{\partial t}+Tu\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{1}{\rho}(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\tilde{f}Z, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t}+u\frac{\partial Z}{\partial x}=-\overline{k}(\rho,p,Z)Z. \tag{3.8}$$

由 (2.21) 式知，(3.7) 式还可由下式代替

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\rho u\frac{\partial E}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial x}-(\frac{4}{3}\mu+\mu')\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{3.9}$$

特别在 $\mu=\mu'=\kappa=0$ 的情形，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=F, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=-f(\rho,p,Z)Z, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t}+u\frac{\partial Z}{\partial x}=-\overline{k}(\rho,p,Z)Z, \tag{3.13}$$

其中 $p=p(\rho,S,Z)$. 和以往一样，有

$$c^2=\frac{\partial p}{\partial \rho}>0,$$

而 $c$ 为局部音速. 事实上，对多方气体，由 (2.41) 与 (2.45) 式不难看出

$$p=(\gamma-1)\exp\left(\frac{S-S_0}{\frac{R}{\gamma-1}}\right)\rho^{\gamma}. \tag{3.14}$$

它与单一气体的情况具有相同的形式.

### 3.2. 一维反应流体力学方程组的拉格朗日形式

采用拉格朗日坐标 $(t', m)$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \rho u \frac{\partial}{\partial m}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial m} \tag{3.15}$$

(见第二章 §5), 在有粘性及热传导性时的方程组 (3.5)—(3.8) 可写为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t'} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial m} - \frac{\partial}{\partial m}\left((\frac{4}{3}\mu + \mu')\rho\frac{\partial u}{\partial m}\right) = F, \tag{3.17}$$

$$T\frac{\partial S}{\partial t'} - (\frac{4}{3}\mu + \mu')\rho\left(\frac{\partial u}{\partial m}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial m}\left(\kappa\rho\frac{\partial T}{\partial m}\right) - \widetilde{f}(\rho, p, Z)Z, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t'} = -\overline{k}(\rho, p, Z)Z; \tag{3.19}$$

而在不计粘性及热传导性时的方程组 (3.10)—(3.13) 则化为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t'} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial m} = F, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t'} = -f(\rho, p, Z)Z, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t'} = -\overline{k}(\rho, p, Z)Z. \tag{3.23}$$

后者具有十分简单的形式.

### 3.3. 一维反应流体力学方程组的数学结构

这儿仅以无粘性及热传导性情形的拉格朗日形式方程组 (3.20)—(3.23) 为例进行讨论. 记

$$U = (\tau, u, S, Z)^{\mathrm{T}}, \tag{3.24}$$

并改记 $(t', m)$ 为 $(t, x)$, 则上述方程组可写为如下形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = C, \tag{3.25}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} & 0 & \frac{\partial p}{\partial S} & \frac{\partial p}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

$$C = (0, F, -fZ, -\overline{k}Z)^{\mathrm{T}},$$

而

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial p}{\partial \rho} = -c^2\rho^2 < 0. \tag{3.27}$$

现求 $A$ 的特征值. 由 (3.26) 式易得

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2\left(\lambda^2 + \frac{\partial p}{\partial \tau}\right),$$

故 $A$ 有四个实特征值

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{\partial p}{\partial \tau}} = \pm c\rho, \tag{3.28}$$

且其相应的左特征向量构成一个完全组. 事实上, 记 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ 为对应于重特征值 $\lambda_{1,2} = 0$ 的左特征向量, 则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \tau}\zeta_2 = 0, \\ \zeta_1 = 0. \end{cases}$$

于是相应于该特征值有两个线性无关的左特征向量 $(0, 0, 1, 0)$ 及 $(0, 0, 0, 1)$.

这样, 方程组 (3.25) 是一个一阶拟线性双曲型方程组 (但具有重特征值, 不是严格双曲型的).

有关这一方程组的一些研究, 例如可见 [4], [5].

## 习 题

1. 试证明：利用连续性方程，可将动量方程 (2.14) 及未燃流体质量平衡方程 (2.16) 分别化为 (2.19) 与 (2.20) 的形式.

2. 试证明：利用连续性方程及动量方程，能量守恒方程 (2.15) 可化为 (2.21) 的形式.

3. 证明：欧拉坐标下的一维反应流体力学方程组 (3.10)—(3.13) 也是一个一阶拟线性双曲型方程组.

4. 写出在忽略粘性与热传导性，即设 $\mu = \mu' = k = 0$ 的情况，在欧拉坐标下具守恒律形式的一维反应流体动力学方程组. 由此求出在解的强间断线上应满足的兰金－雨果尼奥条件 (见第二章 §4)，并证明越过强间断线，函数 $Z$ 保持连续.

## 参考文献


[1] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic Flow and Shock Waves.* New York: Interscience Publishers, 1948

[2] Chorin A. *Random choice methods with applications for reacting gas flow.* J. Comput. Phys., 25 (1977). 253~272

[3] Colella P, Majda A, Roytburd V. *Theoretical and numerical structure for reacting shock waves.* SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7 (1986). 1059~1080

[4] Ben-Artzi M. *The generalized Riemann problem for reacting flows.* J. Comput. Phys., 81 (1989). 70~101

[5] Ben-Artzi M, Birman A. *Computation of reactive duct flows in external fields.* J. Comput. Phys., 86 (1990). 225~255

# 第五章　弹性力学

## §1. 引　　言

弹性力学是研究弹性体在荷载的作用下, 其内力 (应力) 和变形所满足的规律的学科. 这主要可通过讨论弹性体的形变及弹性体的运动规律来得到体现. 所谓荷载, 这儿主要是指作用在弹性体上的机械力, 也可以是温度等各种能导致弹性体变形的物理因素. 本章仅考虑弹性体受机械力作用的情形, 而温度荷载对弹性体的影响则留待以后章节中专门讨论. 什么叫 *弹性体*? 弹性体是指这样一种物体, 它在荷载作用下产生弹性变形, 而当撤去荷载时, 变形立即消失, 物体恢复原来的形状. 金属、岩石、玻璃、木材以及石英等在一定的变形范围内均可以视为弹性体. 弹性体撤去荷载后变形立即消失这一事实, 在理论上反映为物体的变形与应力之间的某种函数关系. 这种关系式是由构成该物体的材料特性决定的, 通常称为 *本构关系*.

本构关系可以是线性的, 也可以是非线性的, 这取决于材料的性质以及变形的大小. 当应力小于弹性极限时, 相当一部分工程材料的本构关系可以近似地看成是线性的, 即服从广义的胡克 (Hooke) 定律. 这时称该物体为 *线性弹性体*. 有时弹性体的本构关系由非线性函数给出, 由此造成的非线性称为 *材料非线性*.

弹性体的变形, 可利用位移的一阶偏导数来描述. 在小变形 (即变形与物体的几何尺寸相比非常小) 的情况下, 变形 (应变) 可以由位移的偏导数的线性函数给出. 但对于大变形的情况, 则必须将变形表示为位移的偏导数的非线性函数. 由此导致的非线性称为 *几何非线性*.

仅讨论线性弹性体小变形的弹性理论称为 *线性弹性理论*. 考虑几何非线性或材料非线性, 或二者兼而有之的弹性理论称为 *非线性弹性理论* 或称为 *有限弹性理论*. 本章着重讨论既包括几何非线性又包括材料非线性的一般非线性弹性力学的数学模型. 有关线性弹性理论的讨论, 见 §5.1 及 §6.1 或参见 [10] 中的第二章.

我们知道，对与连续媒质有关的量通常有欧拉及拉格朗日两种描述方法 (参见第二章). 在弹性力学中，通常采用拉格朗日描述方法. 这里先将这种描述方法作一简单介绍.

设在物体所处的空间已选定直角坐标系 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. 假定弹性体在变形前 (设为某时刻，例如 $t = 0$) 在该空间占据一区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. 通常称该区域为 *参考构形*. 在此区域中的物体质点可用其在上述坐标系下的坐标向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

来表示. 设在该时刻后，弹性体发生变形，其运动规律可用

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

描述，其中 $t$ 表示时间，而 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 表示 $t = 0$ 时位于 $\boldsymbol{x}$ 处的质点在 $t$ 时刻的位置向量. 显然

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}(0, \boldsymbol{x}). \tag{1.2}$$

将弹性体于 $t$ 时刻在空间占据的区域记为 $\Omega_t$, 则对于任意给定的 $t \geqslant 0$, (1.1) 为一个 $\Omega \to \Omega_t$ 的一一到上的映射，即双射 (bijection). 下面的讨论在

$$J = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) > 0 \tag{1.3}$$

的假设下进行. 其物理意义是明显的. 它意味着弹性体在变形过程中，任一体积不为零的部分不可能被压缩到使体积为零或被膨胀到使体积变为无穷大.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 通常称为 *物质坐标* 或 *拉格朗日坐标*. 这是因为其不同的坐标值对应于不同的质点. 而 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 则称为 *空间坐标* 或 *欧拉坐标*, 其不同的坐标值相应于空间的不同点. 相应于这两种不同的坐标，有关连续媒质的一切物理量 (标量，向量，张量), 就有两种不同的描述方法.

一种描述方法是跟踪质点. 例如，对于一个标量 $\theta$, 可以表示为时间 $t$ 及物质坐标 $\boldsymbol{x}$ 的函数:

$$\theta = \phi(t, \boldsymbol{x}). \tag{1.4}$$

这种描述方法称为物质描述或拉格朗日描述. 另一方面，在考察这个量时，也可以着眼于其随空间点的变化，而将其表为时间 $t$ 及空间坐标 $\boldsymbol{y}$ 的函数:

$$\theta = \psi(t, \boldsymbol{y}). \tag{1.5}$$

这种描述方法称为空间描述或欧拉描述. 由 (1.1) 式，上述两种描述方法之间的联系可由下式给出

$$\psi(t, \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x})) = \phi(t, \boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

对于向量与张量也可类似地给出其物质与空间描述方法.

对于一个物理量，在 $\boldsymbol{x}$ 保持不变 (即固定质点) 时，关于 $t$ 的偏导数称为该量的物质导数，如同在流体力学 (见第二章 (1.17) 式) 中那样，将物质导数记为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 若一个物理量 (例如标量 $\theta$) 由空间描述 (1.5) 给出，则显然有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_y)\psi, \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial t}, \dfrac{\partial y_2}{\partial t}, \dfrac{\partial y_3}{\partial t}\right)$ 表示速度向量，$\nabla_y = \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \dfrac{\partial}{\partial y_3}\right)$ 表示关于 $\boldsymbol{y}$ 的梯度算子.

以后为简单计，对于由不同描述方法给出的同一个物理量，在不至于引起混淆的情况下，不再像 (1.4) 与 (1.5) 式中那样，用 $\phi$ 与 $\psi$ 予以区分.

## §2. 变形的描述，应变张量

### 2.1. 变形梯度张量

物体在某一时刻 $t$ 的变形情况，可由此时刻物体内每一质点 $\boldsymbol{x}$ 附近的变形情况来刻画. 而要描写在质点 $\boldsymbol{x}$ 处的变形情况，只要搞清 $\boldsymbol{x}$ 处每一微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)^{\mathrm{T}}$ 的变化情况即可.

设在 $t = 0$ 时 $\boldsymbol{x}$ 处的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 在时刻 $t$ 变为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x})$ 处的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{y} = (\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \mathrm{d}y_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}x_j \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

或写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.2}$$

其中

$$\boldsymbol{F} = \nabla_x \boldsymbol{y} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.3}$$

为二阶张量，称为*变形梯度张量*. 知道了这一张量，就掌握了在 $t$ 时刻弹性体的变形情况.

### 2.2. 柯西 – 格林应变张量

为了进一步阐述变形梯度张量的物理意义，我们利用下述线性代数引理将其作极分解.

**引理 2.1.** *设* $\det \boldsymbol{F} \neq 0$, *则存在正交阵* $\boldsymbol{R}$ *以及对称正定阵* $\boldsymbol{U}$ *和* $\boldsymbol{V}$ *使*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}. \tag{2.4}$$

(2.4) *式称为* $\boldsymbol{F}$ *的极分解.*

这个引理的证明并不困难，可在线性代数教材中找到. 这里作为习题留给读者.

记 $\boldsymbol{U} = (u_{ij})$, $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$. 利用 (2.4) 式，可将 (2.1) 式改写为

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j,k=1}^{3} r_{ik} u_{kj} \mathrm{d}x_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

或

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{k=1}^{3} r_{ik} \mathrm{d}z_k \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.5}$$

而

$$\mathrm{d}z_k = \sum_{j=1}^{3} u_{kj} \mathrm{d}x_j \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{2.6}$$

这说明由微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 变为 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ 的变形可分解为如下两个变形的组合：先由 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 变为 $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$, 再由 $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ 变为 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$. 前一变形由张量 $\boldsymbol{U}$ 、而后一变

形由张量 $\boldsymbol{R}$ 分别决定. 因 $\boldsymbol{U}$ 为对称正定阵，故存在三个相互正交的主方向与三个正的主值. 不失一般性，可设 $\boldsymbol{U}$ 为对角阵，即成立

$$u_{ii} > 0; \qquad u_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

这样，(2.6) 式即可写为

$$\mathrm{d}z_i = u_{ii}\mathrm{d}x_i, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

因此，这一部分变形表现为在三个相互正交的方向上的伸长或压缩 (视 $u_{ii} > 1$ 或 $< 1$ 而定). 因为 $\boldsymbol{R}$ 为正交阵，由 (2.5) 式所表示的由 $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ 到 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ 的变化只是一个刚体旋转.

对极分解 (2.4) 中的第二式 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$, 可作类似的解释.

虽然极分解 (2.4) 允许我们从变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 中剔除刚体旋转，分离出表示局部变形的部分. 但张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的直接计算是很不方便的. 注意到对称正定阵由其平方唯一确定，我们引入

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}^2, \tag{2.8}$$

其中 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 的转置，而 $\boldsymbol{C}$ 称为*右柯西 – 格林应变张量*, $\boldsymbol{B}$ 称为*左柯西 – 格林应变张量*.

**注 2.1.** 在稳态的情形，弹性体处于平衡状态，变形与时间 $t$ 无关，一切有关的量均只是 $\boldsymbol{x}$ 的函数. 此时，假设已知柯西 – 格林应变张量，要求决定弹性体的变形 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = (y_1(\boldsymbol{x}), y_2(\boldsymbol{x}), y_3(\boldsymbol{x}))$, 就化为求解下面的偏微分方程组

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = J^{2/n}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$$

或

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = J^{2/n}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $n = 3$, $\boldsymbol{F}$ 及 $J$ 分别由 (2.3) 及 (1.3) 式决定，而 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 是一个给定的对称正定阵，其行列式为 1. 这组偏微分方程有 3 个未知函数 $y_1$, $y_2$ 及 $y_3$, 但由矩阵的对称性，所包含的方程有 6 个，因而是一个

超定 (即方程个数大于未知函数个数) 的非线性偏微分方程, 称为 三维贝尔特拉米 (Beltrami) 方程. 类似地, 可以定义 $n$ 维贝尔特拉米方程.

### 2.3. 位移梯度张量与无穷小应变张量

我们称

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \tag{2.9}$$

为 位移向量. 利用位移向量, $\boldsymbol{F}$ 可以写为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla_x \boldsymbol{u}, \tag{2.10}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量, 而

$$\nabla_x \boldsymbol{u} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \tag{2.11}$$

则称为 位移梯度张量. 以后为书写简单起见, 在不致引起混淆的情况下, 一律将 $\nabla_x$ 简写为 $\nabla$.

现在, 我们用 $\nabla \boldsymbol{u}$ 来表示右柯西 – 格林应变张量 $\boldsymbol{C}$. 由 (2.7) 与 (2.10) 式, 有

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} (\nabla \boldsymbol{u}). \tag{2.12}$$

前面说过, 张量 $\boldsymbol{C}$ 可用来描述变形过程中在所论点附近各个方向的压缩与伸长; 而 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ 则意味着在该点相对于参考构形没有真正的变形. 因此, $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}$ 可以作为衡量物体相对参考构形而言的形状改变的一个尺度. 由 (2.12) 式

$$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I} = \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} (\nabla \boldsymbol{u}). \tag{2.13}$$

如果变形很小, 即

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{2.14}$$

在 (2.13) 式中忽略掉高阶项, 即进行线性化后, 就得到

$$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{E}, \tag{2.15}$$

其中二阶对称张量

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}) \tag{2.16}$$

称为 无穷小应变张量 或 柯西应变张量, 其分量为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.17}$$

这里需要说明的是，在无穷小变形理论中，由于假设 (2.14), 并注意到 (2.9) 式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\\ &= \frac{\partial u_i}{\partial y_j}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\approx\frac{\partial u_i}{\partial y_j}.\end{aligned}$$

因而通常也可将无穷小应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的分量取为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}+\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right). \tag{2.18}$$

下面我们说明在无穷小变形下，张量 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})$ 的几何意义. 设在初始时刻 $t=0$ 有两个微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^1 &= (\mathrm{d}l_1,0,0)^{\mathrm{T}},\\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 &= (0,\mathrm{d}l_2,0)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

变形后它们分别变为 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2$, 其长度相应地变为 $\mathrm{d}\widetilde{l}_1$ 与 $\mathrm{d}\widetilde{l}_2$. 利用 (2.2) 与 (2.10) 式，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^1 = \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_2}{\partial x_1},\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}l_1, \tag{2.19}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2},1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}l_2. \tag{2.20}$$

由 (2.19) 式，并略去高阶小量，得

$$(\mathrm{d}\widetilde{l}_1)^2=\left(1+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)(\mathrm{d}l_1)^2.$$

因此，再一次利用小变形假设 (2.14), 有

$$\mathrm{d}\widetilde{l}_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}l_1,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{l}_1 - \mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}l_1} = e_{11}. \tag{2.21}$$

于是， $e_{11}$ 表示在无穷小变形后，原先在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的微线元的相对伸长. 对 $e_{22}$ 及 $e_{33}$ 可以给出类似的解释.

现考察在无穷小变形中，两微线元之间夹角的变化. 设 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2$ 之间的夹角为 $\theta$. 由 (2.19) 与 (2.20) 式，并略去高阶小量，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2.$$

因此

$$\mathrm{d}\widetilde{l}_1\mathrm{d}\widetilde{l}_2\cos\theta = 2e_{12}\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2.$$

利用 (2.21) 式，并略去高阶小量，由上式可得

$$e_{12} = \frac{1}{2}\cos\theta.$$

记 $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \theta$. 它是 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$ 之间的夹角在变形后的减少量. 对小变形， $\cos\theta = \sin\gamma \approx \gamma$, 上式又可写为

$$e_{12} = \frac{1}{2}\gamma. \tag{2.22}$$

于是， $e_{12}$ 表示在无穷小变形后，原先在 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 方向上的两微线元之间夹角的减少量的一半. 对 $e_{23}$ 及 $e_{31}$ 可给出类似的解释.

最后，在无穷小变形下，还有

$$J = \det\boldsymbol{F} = \det(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}) \approx 1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{E}, \tag{2.23}$$

其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{E} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的迹. (2.23) 式说明： $\mathrm{tr}\boldsymbol{E}$ 表示在无穷小变形过程中体积微元的相对增长.

# §3. 守恒定律，应力张量

## 3.1. 质量守恒定律

在变形后的弹性体所占空间区域 $\Omega_t$ 中任取一子区域 $G_t$. 设它在参考构形中 (即变形前) 对应于 $G_0 \subset \Omega$. 以 $\rho_0$ 与 $\rho$ 分别表示弹性体在变形前与变形后的质量密度，则质量守恒律可表示为

$$\int_{G_t} \rho \mathrm{d}y = \int_{G_0} \rho_0 \mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

其中 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$ 等. 将上式左侧的积分变量 $\boldsymbol{y}$ 变为 $\boldsymbol{x}$, 注意 $J = \det \boldsymbol{F}$ 为该变换的雅可比 (Jacobi) 行列式，有

$$\int_{G_t} \rho \mathrm{d}y = \int_{G_0} \rho J \mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

从而由 (3.1) 式得

$$\int_{G_0} (\rho J - \rho_0) \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall G_0 \subset \Omega. \tag{3.3}$$

注意到 $G_0$ 的任意性，由上式得到

$$\rho J = \rho_0. \tag{3.4}$$

这就是质量守恒定律的局部形式.

因为 $\rho_0$ 只依赖于 $\boldsymbol{x}$, 而与 $t$ 无关， (3.4) 式又可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho J) = 0, \tag{3.5}$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为物质导数. 由直接计算不难验证 (见习题 2)

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J \operatorname{div}_y \boldsymbol{v}, \tag{3.6}$$

这里 $\operatorname{div}_y$ 表示关于变量 $\boldsymbol{y}$ 的散度. 于是 (3.5) 式可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div}_y \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.7}$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_y)\rho+\rho\operatorname{div}_y\boldsymbol{v}=0, \tag{3.8}$$

这里我们利用了 (1.7) 式. (3.8) 式又可表为如下的形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}_y(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{3.9}$$

这就是在空间描述下质量守恒定律的局部形式 (微分形式) —— *连续性方程*. 我们在第二章关于流体力学的讨论中已得到这一方程 (参见第二章 (1.10) 式). 读者还可将它与在第一章中得到的电荷守恒方程的形式相比较 (参见第一章 (2.20) 式).

### 3.2. 应力

上节只从运动学的角度讨论了弹性体的变形, 并没有考虑引起这些变形的物理原因, 即作用在弹性体上的荷载. 要进一步讨论其他的守恒律, 例如动量守恒律, 就必须对这些引起变形的物理因素加以说明, 并深入分析由它们引起的弹性体内部受力情况的变化.

弹性体的荷载可分为两类. 一类是外力, 另一类是温度等物理因素. 如前所述, 我们这里暂不考虑因温度的变化所造成的影响, 而只讨论以外力形式出现的荷载. 弹性体所受的外力有 *体积力* $\boldsymbol{b}$ —— 单位质量弹性体所受的外力, 如重力等; 还有 *表面力* $\boldsymbol{\tau}$ —— 单位表面积所受到的外力.

在荷载的作用下, 弹性体要发生变形, 变形改变了物体内部分子之间的相对位置, 在物体内形成了一个附加的内力场. 当这个内力场足以和外力相平衡时, 变形不再继续, 弹性体达到平衡状态. 为了精确地描述并分析这个内力场, 柯西 (Cauchy) 引进了 *应力* 的概念.

设 $M$ 为变形后弹性体即 $\Omega_t$ 中的一点. 过 $M$ 点作一曲面 $S$ 将弹性体分为 I 及 II 两部分 (见图 1). 现考察部分 II 对部分 I 的作用. 取曲面 $S$ 在 $M$ 点处的单位法线向量 $\boldsymbol{\nu}$ 指向部分 II 之内. 在 $S$ 上 $M$ 点的邻域内取面积元素 $\Delta S$, 并设部分 II 通过 $\Delta S$ 作用在部分 I 上的力为 $\Delta \boldsymbol{f}$. 定义

$$\boldsymbol{\sigma}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{f}}{\Delta S} \tag{3.10}$$

为 $M$ 点在 $\boldsymbol{\nu}$ 方向的 *应力向量* (注意: $\boldsymbol{\sigma}$ 的方向一般不是 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向).

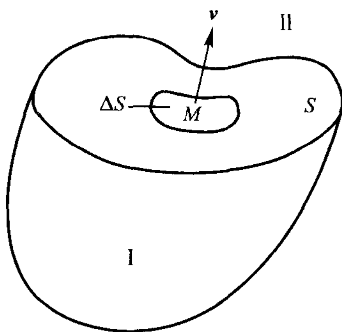



图 1

为了使上述定义合理，我们作如下假定.

**柯西应力原理**：在弹性体内任一给定点 $M$ (设其坐标为 $\boldsymbol{y}$)，对具有公共法线 $\boldsymbol{\nu}$ 的一切曲面 $S$，于给定时刻用上述方式定义的 $M$ 点在 $\boldsymbol{\nu}$ 方向的应力向量是相同的，即与 $S$ 的选取无关. 这样，应力向量可写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\nu}). \tag{3.11}$$

这个原理说明，应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与曲面 $S$ 的曲率无关，而只依赖于曲面 $S$ 在所论点的法线方向. 由牛顿第三定律，立即有

$$\boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{y}, -\boldsymbol{\nu}) = -\boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\nu}). \tag{3.12}$$

### 3.3. 动量守恒定律的积分形式

对 $\Omega_t$ 中任意选定的子区域 $G_t$，我们考察其中的动量变化情况. $G_t$ 中的动量为

$$\int_{G_t} \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}y.$$

设 $G_t$ 的边界为 $S_t$，则 $G_t$ 所受的力为作用在其上的体积力 $\boldsymbol{b}$ 以及在

$G_t$ 之外的弹性体作用在 $S_t$ 上的应力 $\boldsymbol{\sigma}$, 其总和为

$$\int_{S_t} \boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\nu}) \mathrm{d}S_t + \int_{G_t} \rho \boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}y.$$

由牛顿第二定律，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_t} \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}y = \int_{S_t} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}S_t + \int_{G_t} \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}y, \tag{3.13}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为物质导数. 因为在 $t$ 变化时， $G_t$ 也随之变化，因而不能简单地将上式左端的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 移入积分号内，而需利用下述引理进行处理.

**引理 3.1.** 对任何连续可微的函数 $\phi$, 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_t} \rho \phi \mathrm{d}y = \int_{G_t} \rho \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}y. \tag{3.14}$$

**证明** 如同得到 (3.2) 式那样，我们有

$$\int_{G_t} \rho \phi \mathrm{d}y = \int_{G_0} \rho J \phi \mathrm{d}x.$$

由质量守恒律方程 (3.4), 上式可写为

$$\int_{G_t} \rho \phi \mathrm{d}y = \int_{G_0} \rho_0 \phi \mathrm{d}x.$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_t} \rho \phi \mathrm{d}y = \int_{G_0} \rho_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}x.$$

再利用 (3.4) 式，并将上式右端的积分变量再变回到 $\boldsymbol{y}$, 即得 (3.14) 式. 证毕.

利用引理 3.1, (3.13) 式可写为

$$\int_{G_t} \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}y = \int_{S_t} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}S_t + \int_{G_t} \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}y. \tag{3.15}$$

这就是动量守恒定律的积分形式.

要想利用格林公式将上式右端第一项的曲面积分化为体积分，从而得到动量守恒定律的局部（微分）形式，还需要对 $\boldsymbol{\sigma}$ 的性质作进一步的探讨.

### 3.4. 动量矩守恒定律的积分形式

设 $G_t$ 及 $S_t$ 仍如上段中所述. $G_t$ 关于原点的动量矩为

$$\int_{G_t}(\boldsymbol{y}\times\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}y.$$

$G_t$ 所受的总力矩，应由作用在其上的体积力矩与作用在 $S_t$ 上的应力矩组成，即为

$$\int_{S_t}\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S_t+\int_{G_t}(\boldsymbol{y}\times\rho\boldsymbol{b})\mathrm{d}y.$$

由动量矩守恒定律，应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_t}\rho(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}y=\int_{S_t}\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S_t+\int_{G_t}\rho(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}y,$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 仍为物质导数. 应用引理 3.1, 并注意到 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_t}\rho(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}y=\int_{G_t}\rho\left(\boldsymbol{y}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}y. \tag{3.16}$$

从而可得

$$\int_{G_t}\rho\left(\boldsymbol{y}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}y=\int_{S_t}(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}S_t+\int_{G_t}\rho(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{b})\mathrm{d}y. \tag{3.17}$$

这就是动量矩守恒定律的积分形式.

### 3.5. 柯西应力张量

柯西应力原理告诉我们：弹性体内每一点的应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 只依赖于所考察的方向 $\boldsymbol{\nu}$, 而与所取的个别曲面 $S$ 无关. 这使得我们得以定义应力向量. 但在空间每一点，有无穷多个方向 $\boldsymbol{\nu}$, 因而仅仅这样表示应

力还是很不方便的．我们希望在弹性体内每一点，能只用一个量来描述该点的应力．这个量就是柯西应力张量．

**定理 3.1.** *存在二阶张量 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})$ 使*

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}. \tag{3.18}$$

这儿为简单起见，不再标出有关量对 $t$ 的依赖性．

**证明** 不失一般性，不妨设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$．作以原点为顶点的四面体 $\Delta G$，使其三个面为过原点的坐标平面，而其第四面 $\Delta S$ 的法向量恰为 $\boldsymbol{\nu}$（见图 2）．将在坐标平面上的三个面分别记为 $\Delta S_i$ $(i=1,2,3)$，其单位外法线向量分别为 $-\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3)$．在下面我们将用同一记号表示这些面及其面积．显然有

$$\Delta S_i=\nu_i\Delta S \qquad (i=1,2,3), \tag{3.19}$$

其中 $\nu_i$ $(i=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{\nu}$ 的分量．

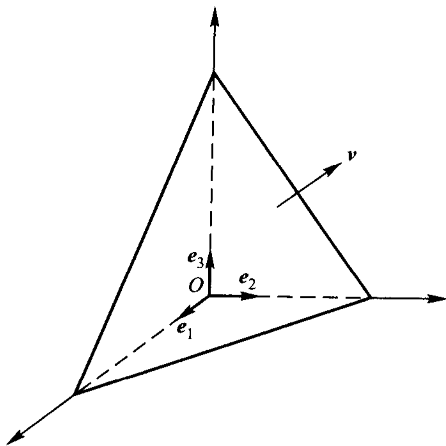



图 2

将动量守恒方程 (3.15) 用于 $\Delta G$，有

$$\begin{aligned}\int_{\Delta G}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y &= \int_{\Delta S}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S\\ &\quad+\sum_{i=1}^{3}\int_{\Delta S_i}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},-\boldsymbol{e}_i)\mathrm{d}S+\int_{\Delta G}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

将上式两端除以 $\Delta S$, 得

$$\frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta G}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y=\frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta S}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S+\frac{1}{\Delta S}\sum_{i=1}^{3}\int_{\Delta S_i}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},-\boldsymbol{e}_i)\mathrm{d}S+\frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta G}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}y. \tag{3.20}$$

在始终保持 $\Delta S$ 的法向量为 $\boldsymbol{\nu}$ 的条件下，令 $\Delta S$ 到原点的距离 $h$ 趋向于零. 因 $\Delta G$ 的体积为 $h$ 的三阶小量，所以在被积函数有界的假定下，易见当 $h\to 0$ 时

$$\frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta G}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y,\quad \frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta G}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}y\to\boldsymbol{0}. \tag{3.21}$$

注意 (3.19) 式，当 $h\to 0$ 时，有

$$\frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta S}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}S\to\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\nu}), \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta S_i}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},-\boldsymbol{e}_i)\mathrm{d}S\to\nu_i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{e}_i)\quad(i=1,2,3). \tag{3.23}$$

这样，注意到 (3.12) 式，令 $h\to 0$, 就可由 (3.20) 式得到

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\nu})=\sum_{i=1}^{3}\nu_i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_i).$$

一般地，我们有

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})=\sum_{i=1}^{3}\nu_i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_i). \tag{3.24}$$

设

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_i)=\sum_{j=1}^{3}t_{ji}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_j\qquad(i=1,2,3),$$

并将其代入 (3.24) 式，就得到

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})=\sum_{i,j=1}^{3}t_{ij}(\boldsymbol{y})\nu_j\boldsymbol{e}_i.$$

这样, 取 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) = (t_{ij}(\boldsymbol{y}))$, 上式即给出 (3.18) 式. 由张量识别定理 (见附录一) 知, $\boldsymbol{T}$ 为二阶张量. 证毕.

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) = (t_{ij}(\boldsymbol{y}))$ 称为*柯西应力张量*. 其分量 $t_{11}, t_{22}, t_{33}$ 称为*正应力*, $t_{12}, \cdots, t_{23}$ 称为*剪应力*.

### 3.6. 在空间描述下动量守恒定律的微分形式, 柯西应力张量的对称性

利用定理 3.1, 动量守恒方程 (3.15) 式可写为

$$\int_{G_t} \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{3} \int_{S_t} t_{ij}\nu_j \mathrm{d}S_t + \int_{G_t} \rho b_i \mathrm{d}y \qquad (i = 1, 2, 3). \quad (3.25)$$

应用格林公式

$$\int_{S_t} t_{ij}\nu_j \mathrm{d}S_t = \int_{G_t} \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} \mathrm{d}y,$$

(3.25) 式可化为

$$\int_{G_t} \left( \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} - \rho b_i \right) \mathrm{d}y = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

由于上式对一切 $G_t \subset \Omega_t$ 均成立, 所以有

$$\rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} - \rho b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad (3.26)$$

或写为向量形式

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}_y \boldsymbol{T} - \rho \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \qquad (3.27)$$

其中 $\mathrm{div}_y \boldsymbol{T} = \left( \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} \right)$ 为一阶张量, 即向量.

(3.27) 式就是在空间描述下动量守恒定律的微分形式. 它与我们在第二章流体力学中所得到的方程在形式上是一样的. 实际上, 到目前为止, 我们还未利用所讨论的对象为弹性体的这一假设.

现考察动量矩守恒定律的微分形式. (3.17) 式的分量形式为

$$\sum_{j,k=1}^{3}\int_{G_t}\rho\varepsilon_{ijk}y_j\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y=\sum_{j,k=1}^{3}\int_{S_t}\varepsilon_{ijk}y_j\sigma_k\mathrm{d}S_t$$
$$+\sum_{j,k=1}^{3}\int_{G_t}\rho\varepsilon_{ijk}y_jb_k\mathrm{d}y \qquad (i=1,2,3), \tag{3.28}$$

其中 $\sigma_k$ 与 $b_k$ 分别为 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的分量，而

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & 若\ (i,j,k)\ 为\ (1,2,3)\ 的偶置换,\\ -1, & 若\ (i,j,k)\ 为\ (1,2,3)\ 的奇置换,\\ 0, & 若\ (i,j,k)\ 中至少有两个数相等.\end{cases}$$

应用定理 3.1 和格林公式，有

$$\int_{S_t}\varepsilon_{ijk}y_j\sigma_k\mathrm{d}S_t=\sum_{l=1}^{3}\int_{S_t}\varepsilon_{ijk}y_jt_{kl}\nu_l\mathrm{d}S_t$$
$$=\sum_{l=1}^{3}\int_{G_t}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y_l}(y_jt_{kl})\mathrm{d}y.$$

将上式代入 (3.28) 式，并注意到 $G_t$ 的任意性，即得动量矩守恒定律的微分形式为

$$\rho\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}y_j\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t}-\sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y_l}(y_jt_{kl})$$
$$-\rho\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}y_jb_k=0 \qquad (i=1,2,3). \tag{3.29}$$

下面我们利用动量守恒方程 (3.26) 化简上式. 显然

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y_l}(y_jt_{kl})=\sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\left(\delta_{jl}t_{kl}+y_j\frac{\partial t_{kl}}{\partial y_l}\right)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}t_{kj}+\sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijk}y_j\frac{\partial t_{kl}}{\partial y_l},$$

其中 $\delta_{jl}$ 为克罗内克 (Kronecker) 记号：

$$\delta_{jl}=\begin{cases}1, & 若 j=l,\\ 0, & 若 j\neq l.\end{cases}$$

将上式代入 (3.29) 式，即得

$$\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}y_j\left(\rho\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t}-\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial t_{kl}}{\partial y_l}-\rho b_k\right)-\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}t_{kj}=0$$

$$(i=1,2,3).$$

注意到动量守恒方程 (3.26), 上式就可简化为

$$\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}t_{kj}=0 \qquad (i=1,2,3).$$

分别取 $i=1,2,3$, 就由上式得到

$$t_{23}=t_{32},\quad t_{31}=t_{13},\quad t_{12}=t_{21}.$$

综合以上所述，我们有

**定理 3.2.** 柯西应力张量 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 为二阶对称张量，即成立

$$t_{ij}=t_{ji}\quad (i,j=1,2,3). \tag{3.30}$$

由以上讨论可以看出，在动量守恒方程 (3.26) 成立的前提下，动量矩守恒定律与柯西应力张量的对称性是等价的.

## 3.7. 彼奥拉 (Piola) 应力张量，物质描述下动量守恒定律的微分形式

在本章一开始就指出，在弹性力学中，通常更方便使用的是物质描述方法，而不是空间描述方法. 下面首先考察，要得到在物质描述下的动量守恒定律的微分形式，会碰到什么困难. 为了得到这个方程，需要将 (3.25) 式中的积分化为在参考构形 $\Omega$ 中的相应区域 $G_0$ 及其边界 $S_0$ 上的积分. 对于其中的体积分，利用变量代换及 (3.4) 式，即有

$$\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y = \int_{G_0}\rho_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x, \tag{3.31}$$

$$\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}y = \int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

难以处理的是如何将曲面积分

$$\int_{S_t} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t$$

化为一个具如下形式的在 $G_0$ 的边界 $S_0$ 上的曲面积分:

$$\int_{S_0} \boxed{?}\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $S_0$ 上的单位外法线向量. 只有这样，才可能应用格林公式，将上述积分化为 $G_0$ 上的体积分，从而得到物质描述下的微分方程. 为此，需要一个有关曲面微元的变换公式.

**引理 3.2.** *设 $\Omega$ 中 $\boldsymbol{x}$ 处的曲面微元 $\mathrm{d}S_0$ ( 其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$) 在变形*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x})$$

*下对应于 $\Omega_t$ 中的曲面微元 $\mathrm{d}S_t$ ( 其单位法向量为 $\boldsymbol{\nu}$), 那么*

$$\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t = J\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0, \tag{3.33}$$

*其中 $\boldsymbol{F}^{-T}$ 表示 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 的转置，而 $J$ 由 (2.23) 式定义.*

**证明** 设 $\Omega$ 中 $\boldsymbol{x}$ 处的两微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^1$ 及 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$ 构成法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的平行四边形面积微元 $\mathrm{d}S_0$; 相应地，经过变形，在 $\Omega_t$ 中 $\boldsymbol{y}$ 处的两微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^1$ 及 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2$ 构成法向量为 $\boldsymbol{\nu}$ 的曲面微元 $\mathrm{d}S_t$. 那么我们有

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0 = \mathrm{d}\boldsymbol{x}^1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2, \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t = \mathrm{d}\boldsymbol{y}^1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{y}^2. \tag{3.35}$$

将 (3.35) 式写为分量形式，可得

$$\begin{aligned}\nu_i \mathrm{d}S_t &= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\mathrm{d}y_j^1\mathrm{d}y_k^2 \\ &= \sum_{j,k,q,r=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial y_j}{\partial x_q}\frac{\partial y_k}{\partial x_r}\mathrm{d}x_q^1\mathrm{d}x_r^2,\end{aligned}$$

其中 $y_j^1$ 表示 $\boldsymbol{y}^1$ 的分量等，而 $\varepsilon_{ijk}$ 的定义见 (3.28) 式. 将上式两端乘以 $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_p}$, 并对 $i$ 从 1 到 3 求和，就得到

$$\sum_{i=1}^{3}\nu_i\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\mathrm{d}S_t=\sum_{i,j,k,q,r=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial y_j}{\partial x_q}\frac{\partial y_k}{\partial x_r}\mathrm{d}x_q^1\mathrm{d}x_r^2. \tag{3.36}$$

利用行列式的定义，有

$$J=\sum_{p,q,r=1}^{3}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial y_1}{\partial x_p}\frac{\partial y_2}{\partial x_q}\frac{\partial y_3}{\partial x_r},$$

于是不难验证

$$\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial y_j}{\partial x_q}\frac{\partial y_k}{\partial x_r}=\varepsilon_{pqr}J. \tag{3.37}$$

这样，注意到 (3.34) 式，(3.36) 式可写为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\nu_i\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\mathrm{d}S_t &= \sum_{q,r=1}^{3}\varepsilon_{pqr}J\mathrm{d}x_q^1\mathrm{d}x_r^2\\ &= Jn_p\mathrm{d}S_0,\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中 $n_p$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的分量. 注意变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的定义 (2.3), 又可将 (3.38) 式改写为

$$\sum_{i=1}^{3}f_{ip}\nu_i\mathrm{d}S_t=Jn_p\mathrm{d}S_0,$$

其中 $f_{ip}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的分量. 上式对 $p=1,2,3$ 均成立，故

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t=J\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0.$$

这就证明了 (3.33) 式. 引理 3.2 证毕.

记

$$\boldsymbol{P}=J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}, \tag{3.39}$$

应用引理 3.2, 我们有

$$\int_{S_t}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t=\int_{S_0}\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0. \tag{3.40}$$

由 (3.39) 式给出的 $\boldsymbol{P}$ 称为 *彼奥拉应力张量*; 相应地， $\boldsymbol{Pn}$ 称为 *彼奥拉应力向量*.

需要注意的是，彼奥拉应力张量虽然是在参考构形 $\Omega$ 上定义的，但它所描述的仍是弹性体变形后的应力. 对于同一质点 (变形后在 $\boldsymbol{y}$ 处), 其彼奥拉应力向量 $\boldsymbol{Pn}$ 与柯西应力向量 $\boldsymbol{T\nu}$ 方向是一致的，只是前者是以未变形的单位面积来测量的，而后者则是以变形后的单位面积来测量的 (见图 3).

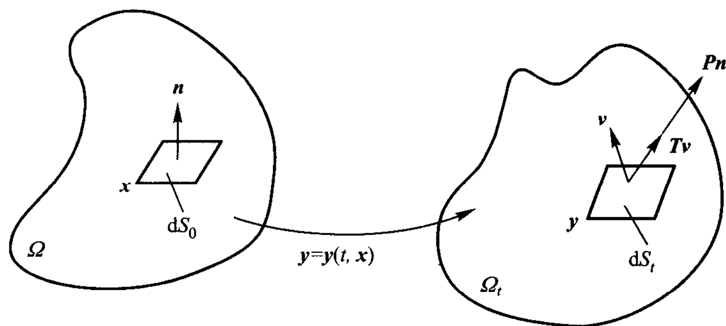



图 3

由 (3.39) 式可以看出，一般地说，彼奥拉应力张量不是对称张量. 记

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P}. \tag{3.41}$$

显然 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称张量，称其为 *第二彼奥拉应力张量*.

引进彼奥拉应力张量后，就不难得到物质描述下动量守恒定律的微分形式.

利用 (3.31)—(3.32) 和 (3.40) 式, 在进行积分变量代换后, (3.25) 式即化为

$$\int_{G_0} \rho_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x - \int_{S_0} \boldsymbol{Pn}\mathrm{d}S_0 - \int_{G_0} \rho_0 \boldsymbol{b}\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}. \tag{3.42}$$

利用格林公式，有

$$\int_{S_0} \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0 = \int_{G_0} \mathrm{div}_x \boldsymbol{P}\mathrm{d}x,$$

从而由 (3.42) 式，并注意到 $G_0$ 的任意性，立即得到

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathrm{div}_x \boldsymbol{P} + \rho_0 \boldsymbol{b}, \tag{3.43}$$

或写为分量形式

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 b_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.44}$$

其中 $p_{ij}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的分量，而对于物质描述下的量，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是一致的. (3.43) 就是物质描述下动量守恒定律的微分形式.

*在物质描述下，动量矩守恒定律等价于第二彼奥拉应力张量的对称性* (见习题 3).

## §4. 本构方程 —— 应力与变形之间的关系

### 4.1. 本构关系的一般形式

到目前为止所讨论的内容，并没有涉及所研究的对象是由何种材料构成的，没有涉及这种材料对荷载的反应具有什么样的特性，因而对一切连续媒质都是适用的. 为了能使动量守恒律方程 (3.43) (如果用空间描述，则为动量方程 (3.27) 与连续性方程 (3.9)) 形成一个封闭的方程组，必须对所考虑的物体，给出一个反映其构成材料本身性质的应力与变形之间的关系. 这个关系就称为*本构关系*.

如前所述，物体的变形可以用变形梯度张量 $\boldsymbol{F} = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ 描述. 一物体是弹性体这一事实，反映为物体在任一给定质点处在某时刻的应力由此时刻变形梯度在该质点的值所唯一确定；也就是说，应力应为变形梯度的函数. 因此，弹性体的本构方程，应该有如下形式：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})), \tag{4.1}$$

这里我们没有明显标出有关量对 $t$ 的依赖性.

**定义 4.1.** 柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 满足假设 (4.1) 的材料, 称为 弹性 的 或 柯西弹性 的, 其中 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 称为 响应函数. 如果响应函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 不明显依赖于 $\boldsymbol{x}$, 称弹性体为 齐次 的, 否则称 非齐次 的.

需要指出的是, 一弹性体是否为齐次的, 并不仅仅由该弹性体本身决定, 还依赖于参考构形的选取. 也就是说, 一弹性体在某参考构形下是齐次的, 在另一 "变形过" 的参考构形下不一定是齐次的.

虽然下面绝大部分的讨论对非齐次的弹性体也是成立的, 但为简单计, 我们将不考虑响应函数关于 $\boldsymbol{x}$ 的明显依赖性, 即假设

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})). \tag{4.2}$$

(4.2) 式只指出了柯西应力张量依赖于变形梯度. 为了使响应函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 真正反映弹性体的变形与其应力之间的关系, 它还必须满足下述的客观性假设.

我们知道, 弹性体在刚体运动下不产生任何变形, 从而其应力分布情况不会发生变化. 也就是说, 弹性体内一点关于某方向的应力向量, 在刚体运动下, 应该变为对应点关于对应方向的应力向量. 设弹性体由参考构形 $\Omega$ 变为 $\Omega_t$ 后, 又作一刚体运动再变为 $\Omega_t^*$, 即 $\boldsymbol{y}$ 变为

$$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \tag{4.3}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 为常向量, 而 $\boldsymbol{Q}$ 为正交阵.

现考察 $\Omega_t$ 中一点 $\boldsymbol{y}$ 处关于方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的应力向量 $T(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}$. 在刚体运动 (4.3) 下, $\boldsymbol{y}$ 点变为 $\Omega_t^*$ 中一点 $\boldsymbol{y}^*$, $\boldsymbol{y}$ 处的方向 $\boldsymbol{\nu}$ 则变为 $\boldsymbol{y}^*$ 处的方向

$$\boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu}, \tag{4.4}$$

而应力向量 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}$ 则应变为 $\boldsymbol{y}^*$ 处关于方向 $\boldsymbol{\nu}^*$ 的应力向量 $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{\nu}^*$ (见图 4), 这里 $\boldsymbol{T}^*$ 是关于构形 $\Omega_t^*$ 的应力张量. 于是,

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}. \tag{4.5}$$

注意到 (4.4) 式, 上式又可写为

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}.$$

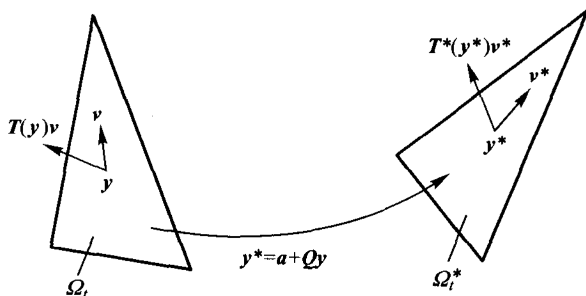



图 4

因为上式对一切方向 $\boldsymbol{\nu}$ 均成立，所以 $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})$, 即成立

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{4.6}$$

由 (4.3) 式，易见

$$\boldsymbol{F}^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(\frac{\partial y_i^*}{\partial x_j}\right) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}.$$

这样，利用由 (4.2) 式给出的响应函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$, (4.6) 式可以改写为

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{4.7}$$

**定义 4.2.** 本构关系中的响应函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 若满足 (4.7) 式，则称其满足客观性假设.

一个形如 (4.2) 的关系式能够成为一种弹性材料的本构方程，其响应函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 必须满足 (4.7) 式，即满足客观性假设.

下面我们讨论在满足客观性假设的情况下，本构关系中的响应函数应具有怎样的形式.

由引理 2.1, 变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 可表为 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, 其中 $\boldsymbol{R}$ 为正交阵，而 $\boldsymbol{U}$ 为对称正定阵. 在 (4.7) 式中，取 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, 就有

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}. \tag{4.8}$$

利用右柯西 - 格林应变张量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^2$, 上式还可改写为

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \tag{4.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}, \tag{4.10}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}^{1/2}), \tag{4.11}$$

$$\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}^{-1/2}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}^{1/2})\boldsymbol{C}^{-1/2}. \tag{4.12}$$

所以，满足客观性假设的本构方程 (4.2) 应具有如下形式:

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \tag{4.13}$$

或

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}. \tag{4.14}$$

现在来考察彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$. 由 $\boldsymbol{P}$ 的定义 (3.39) 式，并利用 (4.14) 式，有

$$\boldsymbol{P}=J\boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}). \tag{4.15}$$

注意到 $\det\boldsymbol{C}=J^2$, 上式又可写为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{C}), \tag{4.16}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{C})=\sqrt{\det\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}). \tag{4.17}$$

对有些弹性材料，其本构方程还可以用给出贮能函数的方式确定.

**定义 4.3.** *如果存在一个 $F$ 的标量函数 $W=\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 使*

$$p_{ij}=\frac{\partial\hat{W}(\boldsymbol{F})}{\partial f_{ij}} \qquad (i,j=1,2,3), \tag{4.18}$$

*其中 $p_{ij}$ 为彼奥拉应力张量的分量，则称该材料为* **超弹性** *的. 函数 $W=\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 称为* **贮能函数** *或* **应变能函数**.

显然，超弹性材料一定是弹性的.

对于超弹性材料，客观性假设由下式给出：

$$\hat{W}(\boldsymbol{QF}) = \hat{W}(\boldsymbol{F}), \tag{4.19}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为任一给定的正交阵. 不难验证，若贮能函数 $\hat{W}$ 满足 (4.19) 式，则由它确定的柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 满足 (4.7) 式 (见习题 5).

### 4.2. 各向同性材料的本构方程

我们所接触到的许多弹性材料都是各向同性的，例如橡胶、金属等. 但也有例外，如木材就是典型的各向异性材料. 下面我们首先给出材料为各向同性的精确定义，然后考察各向同性这一特点如何体现在描述弹性体本构关系的响应函数的性质上.

从物理直观上说，一弹性材料在其中某一点为各向同性，是指在该点的同一变形不管施于哪个方向上，由此引起的应力响应本质上应该是相同的.

考察弹性体内一质点 $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega$ 处的情况. 首先看弹性体的如下均匀变形

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0), \tag{4.20}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为常张量. 在这一变形下，质点 $\boldsymbol{x}^0$ 保持不变，而在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的柯西应力张量为 $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$.

其次考虑如下的变形. 先将 $\Omega$ 绕 $\boldsymbol{x}^0$ 点作旋转变换，设其变换矩阵为 $\boldsymbol{Q}$ (正交阵); 然后再对其施以一个使 $\boldsymbol{x}^0$ 保持不变的、变形梯度为 $\boldsymbol{F}$ 的均匀变形，即将 $\boldsymbol{x}$ 点变为 (见图 5)

$$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{FQ}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0).$$

这个变形的变形梯度张量为 $\boldsymbol{FQ}$. 在这个变形下，质点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的柯西应力张量为 $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{FQ})$.

在上述两种情况下，我们只是将同一变形施于弹性体在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的不同方向. 如果材料在各个方向上对变形的应力响应都是一样的，那么在这两种情况下， $\boldsymbol{x}^0$ 处的应力张量应该是一样的，即成立

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{FQ}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}). \tag{4.21}$$

**定义 4.4.** *如果弹性材料的本构方程 (4.2) 中的响应函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 对一切给定的正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足 (4.21) 式，则称该材料为* 各向同性 *的.*

下面对各向同性的弹性材料讨论其本构方程的形式.

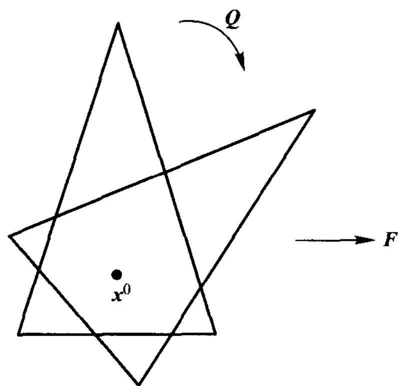



图 5

由引理 2.1 知，$\boldsymbol{F}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为正交阵. 这样，由各向同性材料的定义 (4.21) 式有

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}). \tag{4.22}$$

注意 $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ 的定义 (4.11) 及 (2.8) 式，还有

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}) = \widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}).$$

因此，对各向同性材料，柯西应力张量可表为 $\boldsymbol{V}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 的函数，即本构关系具有如下形式：

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}) \tag{4.23}$$

或

$$\boldsymbol{T} = \widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}). \tag{4.24}$$

通过更精细的讨论可以证明，(4.24) 式实际上还可以表示为更为明确的形式，见下述的定理.

**定理 4.1.** 对各向同性的弹性材料，其本构方程具有如下形式

$$\boldsymbol{T} = \beta_0(I_B)\boldsymbol{I} + \beta_1(I_B)\boldsymbol{B} + \beta_2(I_B)\boldsymbol{B}^2, \tag{4.25}$$

其中 $\beta_0, \beta_1$ 及 $\beta_2$ 为对称张量 $\boldsymbol{B}$ 的三个主不变量 $I_B$ 的标量函数.

这个定理的证明，读者可参阅 [4].

下面讨论彼奥拉应力张量. 因为 $\boldsymbol{P}$ 不是对称张量，不可能给出类似于 (4.25) 式的表示. 但对各向同性材料的第二彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 仍有类似的结果，即可以表示为右柯西 - 格林应变张量 $\boldsymbol{C}$ 的二次矩阵多项式，而该矩阵多项式的系数则只依赖于 $\boldsymbol{C}$ 的三个主不变量. 详见下面的定理.

**定理 4.2.** 对各向同性的弹性材料，其本构方程可表为如下形式

$$\boldsymbol{\Sigma} = \gamma_0(I_C)\boldsymbol{I} + \gamma_1(I_C)\boldsymbol{C} + \gamma_2(I_C)\boldsymbol{C}^2, \tag{4.26}$$

其中 $\gamma_0, \gamma_1$ 及 $\gamma_2$ 为对称张量 $\boldsymbol{C}$ 的三个主不变量 $I_C$ 的标量函数.

**证明** 由 (3.39) 与 (3.41) 式,

$$\boldsymbol{\Sigma} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}. \tag{4.27}$$

对 $\boldsymbol{T}$ 应用定理 4.1, 并注意到 (2.7)—(2.8) 式，上式给出

$$\boldsymbol{\Sigma} = J(\beta_0(I_B)\boldsymbol{C}^{-1} + \beta_1(I_B)\boldsymbol{I} + \beta_2(I_B)\boldsymbol{C}). \tag{4.28}$$

由 $\boldsymbol{F}$ 的极分解 (见引理 2.1) 易得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{R}$ 为正交阵. 因此,

$$I_B = I_C. \tag{4.29}$$

此外，由凯雷 - 哈密顿 (Cayley–Hamilton) 定理，成立

$$\boldsymbol{C}^3 - I_1(\boldsymbol{C})\boldsymbol{C}^2 + I_2(\boldsymbol{C})\boldsymbol{C} - I_3(\boldsymbol{C})\boldsymbol{I} = 0, \tag{4.30}$$

其中 $I_i(\boldsymbol{C})$ $(i = 1, 2, 3)$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的第 $i$ 个主不变量. 所以

$$\boldsymbol{C}^{-1} = I_3(\boldsymbol{C})^{-1}(I_2(\boldsymbol{C})\boldsymbol{I} - I_1(\boldsymbol{C})\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^2). \tag{4.31}$$

又显然有

$$J = I_3(\boldsymbol{C})^{1/2}. \tag{4.32}$$

将 (4.29) 、 (4.31)—(4.32) 式代入 (4.28) 式，即得 (4.26) 式. 定理证毕.

**定理 4.3.** 设参考构形为自然状态，即成立 $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I})=0$, 则对在此参考构形附近的变形，各向同性弹性材料的本构方程有如下形式：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\lambda(\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}})\boldsymbol{I}+2\mu\widetilde{\boldsymbol{E}}+o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|), \tag{4.33}$$

其中常数 $\lambda$ 及 $\mu$ 称为拉梅 (Lamé) 常数, $\widetilde{\boldsymbol{E}}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})$, 而 $o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|)$ 表示 $|\widetilde{\boldsymbol{E}}|$ 的高阶项.

**证明** 容易直接验证

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\boldsymbol{C} &= 3+2\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}},\\ \mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2 &= 3+4\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}+o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|),\\ \mathrm{tr}\boldsymbol{C}^3 &= 3+6\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}+o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|).\end{aligned}$$

现在利用以上诸式来计算 $C$ 的三个主不变量. 首先易见

$$\begin{aligned}I_1(\boldsymbol{C}) &= \mathrm{tr}\boldsymbol{C}=3+2\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}},\\ I_2(\boldsymbol{C}) &= \frac{1}{2}((\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2)=3+4\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}+o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|).\end{aligned}$$

为计算 $I_3(\boldsymbol{C})$, 在 (4.30) 两端取迹，并利用以上两式，可得

$$\begin{aligned}I_3(\boldsymbol{C}) &= \frac{1}{6}(\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^3-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{C}\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2+\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^3\\ &= 1+2\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}+o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|).\end{aligned}$$

对 $I_C$ 的任一标量函数 $\gamma$, 利用泰勒展开，易知有

$$\begin{aligned}\gamma(I_C) &= \gamma(I_C)\Big|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}}+\frac{\partial}{\partial I_1}\gamma(I_C)\Big|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}}\cdot 2\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial I_2}\gamma(I_C)\Big|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}}\cdot 4\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial}{\partial I_3}\gamma(I_C)\Big|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}}\cdot 2\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}\\ &\quad+o(|\widetilde{\boldsymbol{E}}|).\end{aligned} \tag{4.34}$$

在 (4.26) 式中令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$, 有

$$\gamma_0(I_C)+\gamma_1(I_C)+\gamma_2(I_C)=0, \text{ 当 } \boldsymbol{C}=\boldsymbol{I} \text{ 时}. \tag{4.35}$$

将 $\gamma_0(I_C)$, $\gamma_1(I_C)$ 及 $\gamma_2(I_C)$ 分别表示成 (4.34) 式的形式，将其代入 (4.26) 式，并注意到 (4.35) 式，即得 (4.33) 式. 定理证毕.

如果在本构关系 (4.33) 式中忽略掉 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 的高阶项，就得到

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}})\boldsymbol{I} + 2\mu\widetilde{\boldsymbol{E}}. \tag{4.36}$$

不难看出，这个本构关系仍满足客观性假设，而且所表示的材料是各向同性的. 具有 (4.36) 式这种本构关系的材料称为圣维南 - 基尔霍夫 (St. Venant–Kirchhoff) 材料. 这是一种最简单的非线性弹性材料.

对于超弹性材料而言，各向同性由下式定义：

$$\hat{W}(\boldsymbol{FQ}) = \hat{W}(\boldsymbol{F}), \tag{4.37}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为任一给定的正交阵. 不难证明，若超弹性材料的贮能函数满足 (4.37) 式，则由它给出的柯西应力张量满足 (4.21) 式 (见习题 6).

### 4.3. 贮能函数的例子

对上段给出的圣维南 - 基尔霍夫材料，可以验证，其贮能函数由下式给出：

$$W = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}})^2 + \mu\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{E}}^2. \tag{4.38}$$

为了进一步给出一些有用的贮能函数，对各向同性材料，先探讨其贮能函数的形式. 设该函数由

$$W = \hat{W}(\boldsymbol{F}) \tag{4.39}$$

给出. 在 (4.19) 式中取 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, 并注意到 (2.4) 及 (2.7) 式，就有

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \hat{W}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) = \hat{W}(\boldsymbol{U}) = \widetilde{W}(\boldsymbol{C}),$$

即贮能函数仅依赖于 $\boldsymbol{C}$. 这儿, 类似于 (4.11), 定义 $\widetilde{W}(\boldsymbol{C}) = \hat{W}(\boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}})$. 再利用 (4.37) 及上式，并注意到 (2.7) 式，可得

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \hat{W}(\boldsymbol{FQ}) = \widetilde{W}((\boldsymbol{FQ})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{FQ})) = \widetilde{W}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{CQ}),$$

即贮能函数可写为

$$W = \widetilde{W}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{CQ}), \tag{4.40}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为任一给定的正交阵. 因为 $\boldsymbol{C}$ 为对称正定阵, 所以总存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 其中 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 及 $\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的主值. 于是, 贮能函数又可写为

$$W=\widetilde{W}(\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)). \tag{4.41}$$

这说明, $W$ 实际上只依赖于 $\boldsymbol{C}$ 的主值, 从而 $W$ 只依赖于 $\boldsymbol{U}$ 的主值 $\mu_1$, $\mu_2$ 及 $\mu_3$. 显然, $\mu_i=\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ $(i=1,2,3)$.

对不可压缩的情况, 即变形满足约束条件

$$J=1 \tag{4.42}$$

时, 奥格登 (Ogden) 给出如下形式 (奥格登材料) 的贮能函数:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{M} a_i(\mu_1^{\alpha_i}+\mu_2^{\alpha_i}+\mu_3^{\alpha_i}-3) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{N} b_i((\mu_2\mu_3)^{\beta_i}+(\mu_3\mu_1)^{\beta_i}+(\mu_1\mu_2)^{\beta_i}-3), \end{aligned} \tag{4.43}$$

其中常数 $a_i\geqslant 0$, $b_i\geqslant 0$, $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta_i\geqslant 0$. 上式各项中出现的 $-3$ 是非本质的, 只是为了使当 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$ 时, $W=0$. 实验表明, 某种硫化橡胶的贮能函数可由 (4.43) 式给出, 其中

$$M=2,\quad N=1,\quad \alpha_1=5,\quad \alpha_2=1.3,\quad \beta_1=2;$$

$$a_1=24,\quad a_2=4.8\times 10^4,\quad b_1=5\times 10^2(\mathrm{kg/m^2}).$$

作为 (4.43) 的特例, 有新型胡克 (Neo–Hookean) 材料:

$$W=a_1(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2-3); \tag{4.44}$$

姆内－里夫林 (Mooney–Rivlin) 材料:

$$\begin{aligned} W &= a_1(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2-3) \\ &\quad +b_1((\mu_2\mu_3)^2+(\mu_3\mu_1)^2+(\mu_1\mu_2)^2-3). \end{aligned} \tag{4.45}$$

对可压缩的情况，变形不受 (4.42) 式的限制，奥格登建议在 (4.43) 式右端添加一项 $\Gamma(\mu_1\mu_2\mu_3)=\Gamma(\det \boldsymbol{F})$，其中 $\Gamma$ 应满足如下条件：

$$\text{当 } \xi \to +0 \text{ 时}, \qquad \Gamma(\xi) \to +\infty. \tag{4.46}$$

这意味着对所考察的材料，需要无穷大的能量才能将其体积压缩为零. 函数 $\Gamma$ 的图像，见图 6. 这样，可压缩的奥格登材料的贮能函数由下式给出：

$$\begin{aligned} W = & \sum_{i=1}^{M} a_i(\mu_1^{\alpha_i}+\mu_2^{\alpha_i}+\mu_3^{\alpha_i}-3) \\ & +\sum_{i=1}^{N} b_i((\mu_2\mu_3)^{\beta_i}+(\mu_3\mu_1)^{\beta_i}+(\mu_1\mu_2)^{\beta_i}-3)+\Gamma(\mu_1\mu_2\mu_3). \end{aligned} \tag{4.47}$$

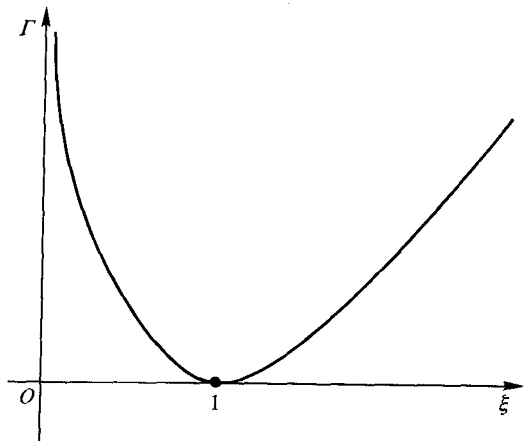



图 6

希阿雷 (Ciarlet) 与盖依蒙纳 (Geymonat) 给出一类材料的贮能函数为

$$\begin{aligned} W \;=\; & a(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)+b((\mu_2\mu_3)^2+(\mu_3\mu_1)^2+(\mu_1\mu_2)^2) \\ & +\Gamma(\mu_1\mu_2\mu_3), \end{aligned} \tag{4.48}$$

其中 $a>0$, $b>0$, $\Gamma(\xi)=c\xi^2-d\ln\xi+e$, 而 $c>0$, $d>0$, $e\in\mathbb{R}$ (见 [4], [5]).

以上的贮能函数均由张量 $\boldsymbol{U}$ (或 $\boldsymbol{C}$) 的主值给出. 为了能用变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 表示贮能函数, 只要注意

$$\begin{cases} \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}), \\ (\mu_2\mu_3)^2+(\mu_3\mu_1)^2+(\mu_1\mu_2)^2=\operatorname{tr}(\operatorname{cof}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})), \\ \mu_1\mu_2\mu_3=\det\boldsymbol{F}, \end{cases} \tag{4.49}$$

其中 $\operatorname{cof}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的余子式矩阵, 即由 $\boldsymbol{A}$ 中元素相应的代数余子式组成的矩阵. (4.49) 中第一及第三两式是显然的, 第二式的证明见习题 9. 特别当 $\alpha_i=\beta_i=2$ 时, 容易利用 (4.49) 中的诸式将 (4.47) 式的右端用 $F$ 的表达式给出.

### 4.4. 线性弹性 —— 广义胡克定律

假设参考构形是自然状态, 即成立 $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$. 对在参考构形附近的小变形, 可用它的线性化作为一种近似.

记

$$\varepsilon=|\nabla\boldsymbol{u}|=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2} \tag{4.50}$$

对于小变形, 我们总假定

$$\varepsilon\ll 1. \tag{4.51}$$

将 (4.16) 式中的 $\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{C})$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$ 附近展开, 注意到

$$\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}, \tag{4.52}$$

我们有

$$\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{C})=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})+O(\varepsilon^2), \tag{4.53}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 为一个四阶张量, 其分量为

$$a_{ijkl}=2\left.\frac{\partial\overline{p}_{ij}}{\partial c_{kl}}\right|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}}, \tag{4.54}$$

其中 $\overline{p}_{ij}$ 及 $c_{kl}$ 分别为 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的分量; 而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})$ 表示对 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}$ 这两个张量作张量积后再进行缩并 (见附录一), 这是分量为

$$\sum_{k,l=1}^{3}a_{ijkl}(c_{kl}-\delta_{kl})$$

的二阶张量. 又注意到由 (2.15) 式, 有

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{E}+O(\varepsilon^2), \tag{4.55}$$

将 (4.53) 代入 (4.16) 式易得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= (\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})+O(\varepsilon^2)) \\ &= \boldsymbol{AE}+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{4.56}$$

其中 $\boldsymbol{AE}$ 的意义同 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})$. 在上式中略去 $O(\varepsilon^2)$, 即取线性近似, 就得到

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{AE}, \tag{4.57}$$

或写为分量的形式

$$p_{ij}=\sum_{k,l=1}^{3}a_{ijkl}e_{kl}, \tag{4.58}$$

其中

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

为无穷小应变张量的分量 (参见 (2.17) 式).

(4.57) 或 (4.58) 式就是在自然状态附近小变形的情况下, 本构关系的线性近似. 它是经典线性弹性理论的基础, 称为*广义胡克定律*. 需要指出的是, 这个广义胡克定律并不是前述一般弹性理论的特例, 而只是对小变形情形的一种近似, 因为它并不满足客观性假设.

因为 $\boldsymbol{C}$ 是对称张量, 由 $\boldsymbol{A}$ 的定义 (4.54) 式知

$$a_{ijkl}=a_{ijlk}.$$

如果假定材料是超弹性的, 则不难验证 (见习题 4), 还有

$$a_{ijkl}=a_{klij}.$$

这样, 四阶张量 $\boldsymbol{A}$ 具有以下的对称性:

$$a_{ijkl}=a_{klij}=a_{ijlk}=a_{jikl}. \tag{4.59}$$

下面讨论各向同性材料的情况. 注意 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F\Sigma}$ (见 (3.41) 式), 由定理 4.3, 容易证明

$$p_{ij}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})\delta_{ij}+2\mu e_{ij}, \tag{4.60}$$

从而得到

$$a_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{4.61}$$

这一结果, 也可利用四阶张量 $\boldsymbol{A}$ 是各向同性的性质, 由四阶各向同性张量的一般形式 (见附录一) 导出. (4.60) 式是用应变来表示应力, 通常称为应力-应变关系. 也可以从 (4.60) 式解出 $e_{ij}$, 得到如下的应变-应力关系:

$$e_{ij}=\frac{1}{2\mu}p_{ij}-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(p_{11}+p_{22}+p_{33})\delta_{ij}. \tag{4.62}$$

为了进一步说明拉梅常数的物理意义, 我们先回顾一下最简单的胡克定律. 设有一长为 $l$ 、横截面为 $S$ 的均匀圆柱形构件, 并设其在轴向拉力 $f$ 的作用下产生拉伸变形, 伸长量为 $\Delta l$. 胡克定律指出: 在相对伸长较小时, 其相对伸长 $\varepsilon_a=\Delta l/l$ 与轴向应力 $\sigma=f/S$ 成正比, 即成立

$$\sigma=E\varepsilon_a, \tag{4.63}$$

其中 $E$ 只由材料决定, 称为杨氏 (Young) 模量. 此外, 实验还表明: 在一定条件下, 随着拉伸荷载的增加, 构件的横截面直径 $d$ 将随之减少. 记 $\Delta d$ 为 $d$ 的增加量 (负值), 并记 $\varepsilon_d=\Delta d/d$, 则 $-\varepsilon_d$ 与 $\varepsilon_a$ 成正比, 即成立

$$-\varepsilon_d=\nu\varepsilon_a, \tag{4.64}$$

其中 $\nu$ 称泊松比.

如果我们取上述轴向拉伸的方向为 $\boldsymbol{e}_1$ 方向, 那么这个单轴拉伸应力状态的应力张量为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

从而由 (4.62) 式得

$$e_{11}=\frac{(\lambda+\mu)\sigma}{\mu(3\lambda+2\mu)},\quad e_{22}=e_{33}=-\frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda+2\mu)},$$
$$e_{ij}=0,\qquad i\neq j.$$

由杨氏模量与泊松比的意义，我们知道

$$\frac{\sigma}{e_{11}} = E, \qquad -\frac{e_{22}}{e_{11}} = -\frac{e_{33}}{e_{11}} = \nu.$$

因此成立

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \tag{4.65}$$

或

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{4.66}$$

这样，利用杨氏模量 $E$ 与泊松比 $\nu$, 应变 – 应力关系 (4.62) 可以写为如下的形式：

$$\begin{cases} e_{11} = \dfrac{1}{E}(p_{11} - \nu(p_{22} + p_{33})), \\ e_{22} = \dfrac{1}{E}(p_{22} - \nu(p_{33} + p_{11})), \\ e_{33} = \dfrac{1}{E}(p_{33} - \nu(p_{11} + p_{22})), \\ e_{ij} = \dfrac{1}{2\mu}p_{ij}, \qquad i \neq j. \end{cases} \tag{4.67}$$

这是工程中最常用的应变 – 应力关系. 其物理意义是明显的. 如 (4.67) 的第一式说明： $\boldsymbol{e}_1$ 方向的正应变是由 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的正应力 $p_{11}$ 产生的伸长，减去 $\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{e}_3$ 方向的正应力产生的压缩而成的.

现在考察剪应变 $e_{ij}$ 与剪应力 $p_{ij}$ $(i \neq j)$. 以 $e_{12}$ 与 $p_{12}$ 为例，将 (2.22) 代入 (4.67) 式有

$$\mu = p_{12}/\gamma, \tag{4.68}$$

其中 $\gamma$ 为 $\boldsymbol{e}_1$ 及 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的微线元在变形后其夹角的减少量. (4.68) 式说明：拉梅常数 $\mu$ 表示剪应力与由它所引起的角度变化之比，称为剪切模量.

由 (2.23) 式，在线性弹性的情形，有

$$J = 1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{E},$$

从而由变形产生的体积增长率为

$$J-1=\mathrm{tr}\boldsymbol{E}.$$

将平均正应力 $\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{P}$ 与由变形产生的体积增长率之比 $\kappa$ 称为 体积弹性模量. 由 (4.62) 式可得

$$\kappa=\lambda+\frac{2}{3}\mu. \tag{4.69}$$

从以上讨论可以看出: 对拉梅常数 $\lambda$ 及 $\mu$ 应施加限制, 使得杨氏模量 $E$ 、剪切模量 $\mu$ 、泊松比 $\nu$ 及体积弹性模量 $\kappa$ 均取正值.

## §5. 弹性动力学方程组及其数学结构

### 5.1. 线性弹性动力学方程组

在这一段里, 我们讨论线性弹性动力学方程组及其定解问题. 此时, 本构关系由 (4.58) 式给出. 将其代入动量守恒方程 (3.44), 并注意到由 (2.9) 式有 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$, 就得到如下的方程组

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\partial x_k}\right)+\rho_0 b_i \quad (i=1,2,3). \tag{5.1}$$

由于 $a_{ijkl}=a_{ijlk}$ (见 (4.59) 式), 故

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\partial x_k}=\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}.$$

这样, (5.1) 式可以简写为下述形式:

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}+\rho_0 b_i \quad (i=1,2,3). \tag{5.2}$$

(5.2) 式是一个未知函数为 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 的二阶线性偏微分方程组. 要研究这个方程组的性质及其定解问题, 首先要确定它的类型.

为此必须对线性弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 进一步给出在物理上合理的假定.

在弹性体自由振动, 即外力 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 的情况, 考察方程组 (5.2) 如下形式的平面波解:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{x}+\lambda t)}, \tag{5.3}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 及 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 均为实向量. 对纯弹性材料的自由振动而言, 由于既没有能量的增加, 也没有能量的损失即耗散效应, 我们应期望平面波 (5.3) 在传播过程中其振幅既不增大也不衰减. 这样, 在 (5.3) 右端的 $\lambda$ 应保持为实值, 于是应有

$$\rho_0\lambda^2>0. \tag{5.4}$$

将平面波 (5.3) 代入 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时的方程组 (5.2), 可得

$$\rho_0\lambda^2\xi_i=\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\xi_k\eta_j\eta_l \quad (i=1,2,3).$$

将上式两端乘以 $\xi_i$, 并对 $i$ 从 1 到 3 求和, 有

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l=\rho_0\lambda^2|\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{5.5}$$

这意味着对一切非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 及 $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^3$, (5.5) 式的左端恒取正值. 据此, 我们给出如下的定义.

**定义 5.1.** *若存在常数 $\alpha>0$, 使*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l\geqslant\alpha|\boldsymbol{\xi}|^2|\boldsymbol{\eta}|^2, \quad \forall\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^3, \tag{5.6}$$

*则称四阶张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足*强椭圆性条件.

下面总假定线性弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件. 对于各向同性材料, 可以证明: 强椭圆性条件 (5.6) 等价于拉梅常数 $\lambda$ 及 $\mu$ 满足

$$\mu>0, \qquad \lambda+2\mu>0. \tag{5.7}$$

这个结论的证明作为习题留给读者.

如果张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.6), 则称方程组 (5.2) 为 二阶双曲型方程组 (关于这个方程组双曲性的进一步说明，见下段对非线性弹性动力学方程组的讨论).

如同波动方程一样，对二阶线性双曲型方程组 (5.2) 也可以提两类定解问题：柯西问题与混合初 – 边值问题.

所谓柯西问题，就是在 $t>0$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ 中求方程组 (5.2) 的解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, 使其在 $t=0$ 时满足初始条件：

$$u_i(0,\boldsymbol{x})=u_i^0(\boldsymbol{x}),\quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(0,\boldsymbol{x})=u_i^1(\boldsymbol{x})\qquad (i=1,2,3),\quad (5.8)$$

其中 $u_i^0(\boldsymbol{x})$ 与 $u_i^1(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,3)$ 均为适当光滑的已知函数.

混合初 – 边值问题的提法如下：设 $\Omega$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域，在 $t>0$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 中求方程组 (5.2) 的解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, 使其在 $t=0$ 时满足形如 (5.8) 的初始条件，而在 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 上满足下述边界条件之一：

$$u_i\big|_{\partial\Omega}=h_i(t,\boldsymbol{x})\quad (i=1,2,3)\qquad (5.9)$$

或

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}a_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}n_j\bigg|_{\partial\Omega}=\sigma_i(t,\boldsymbol{x})\quad (i=1,2,3),\qquad (5.10)$$

其中 $T>0$ 为任意给定的正数， $h_i$ 及 $\sigma_i$ $(i=1,2,3)$ 为适当光滑的已知函数，并在 $\{t=0\}\times\partial\Omega$ 上满足适当的相容性条件. 边界条件 (5.9) 相应于在弹性体的边界 $\partial\Omega$ 上给定位移 $\boldsymbol{u}$, 而边界条件 (5.10) 则相应于在边界 $\partial\Omega$ 上给定应力向量 $\boldsymbol{Pn}$. 在应用中还会经常碰到两种边界条件混合出现的情形：在 $\partial\Omega$ 的一部分 $\Gamma_1$ 上给定形如 (5.9) 的边界条件，而在其另一部分 $\Gamma_2$ 上给定形如 (5.10) 的边界条件.

线性弹性动力学方程组 (5.2) 是一个二阶线性双曲型方程组，其定解问题可用常规的方法处理，例如，可用算子半群的方法予以讨论 (见 [9]).

特别对各向同性材料的情况，方程组 (5.2) 的许多定解问题可简化为波动方程的相应问题予以讨论. 此时，由 (4.61) 式,

$$a_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}),$$

因此方程组 (5.2) 化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta \boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{u}. \tag{5.11}$$

这里，为讨论简单起见，我们设 $\rho_0 = 1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

下面考察方程组 (5.11) 的柯西问题. 由第一章引理 6.3 知，任一向量场 $\boldsymbol{u}$ 均可分解为纵场与横场的叠加:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \tag{5.12}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 分别为纵场与横场，即满足条件:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = 0. \tag{5.13}$$

这一分解现在相当于将弹性波分解为一个无旋膨胀部分和一个等容部分. 由第一章引理 6.2, 纵场 $\boldsymbol{v}$ 一定可以表示为一个标量场 $\phi$ 的梯度:

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\phi. \tag{5.14}$$

这样，对于纵场 $\boldsymbol{v}$, 方程组 (5.11) 化为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{grad}\,\phi = \mu\Delta\mathrm{grad}\,\phi + (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\Delta\phi,$$

即

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = a_1^2\Delta \boldsymbol{v}, \tag{5.15}$$

其中

$$a_1^2 = \lambda + 2\mu; \tag{5.16}$$

而对于横场 $\boldsymbol{w}$, 方程组 (5.11) 则化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = a_2^2\Delta \boldsymbol{w}, \tag{5.17}$$

其中

$$a_2^2 = \mu. \tag{5.18}$$

这样，各向同性的线性弹性动力学方程组 (5.11) 的柯西问题就可以化为波动方程 (5.15) 及 (5.17) 的相应问题来求解.

设初始条件由 (5.8) 式给出. 将初始资料 $\boldsymbol{u}^0$ 及 $\boldsymbol{u}^1$ 分解为纵场与横场之和:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^0 &= \boldsymbol{u}_L^0 + \boldsymbol{u}_T^0, & (5.19)\\ \boldsymbol{u}^1 &= \boldsymbol{u}_L^1 + \boldsymbol{u}_T^1, & (5.20) \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{u}_L^0$ 与 $\boldsymbol{u}_L^1$ 为纵场, $\boldsymbol{u}_T^0$ 与 $\boldsymbol{u}_T^1$ 为横场. 设 $\boldsymbol{v}$ 为波动方程 (5.15) 在初始条件

$$\boldsymbol{v}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_L^0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_L^1 \tag{5.21}$$

下的解; $\boldsymbol{w}$ 为波动方程 (5.17) 在初始条件

$$\boldsymbol{w}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_T^0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_T^1 \tag{5.22}$$

下的解, 不难验证, $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 仍分别为纵场与横场. 所以它们的叠加, 即 (5.12) 式, 给出柯西问题 (5.11) 及 (5.8) 的解.

在实际求解中, 将初始资料分解为纵场与横场的叠加不一定方便. 利用 (5.12) 式, 可以看出, 方程组 (5.11) 还可以化为如下的四阶方程 (作为习题留给读者验证):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2\Delta\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{5.23}$$

利用齐次和非齐次波动方程柯西问题的求解公式 (例如, 见 [1], [2]), 可以由上式给出柯西问题 (5.11) 及 (5.8) 的解的表达式.

如所周知, 对波动方程 (5.15), 解于时刻 $t$ 在空间点 $\boldsymbol{x}$ 处的值的依赖区域为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心、半径为 $a_1t$ 的球面 (例如, 见 [1]); 而对波动方程 (5.17), 相应的依赖区域则为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心、半径为 $a_2t$ 的球面. 但不能据此得出方程组 (5.11) 的解的相应的依赖区域为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心、半径分别为 $a_1t$ 与 $a_2t$ 的两个球面. 这是因为在分解式 (5.19) 及 (5.20) 中, 右端的纵场与横场在某一点处的值, 并不仅仅由其左端向量场在该点附近的局部性态确定, 而依赖于整个空间中被分解的向量场. 但是利用方程组 (5.23) 所导出的方程组 (5.11) 柯西问题解的表达式, 可以证明: 方程组 (5.11) 的解于时刻 $t$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的值的依赖区域为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心、半径分别为 $a_1t$ 与 $a_2t$ 的两个球面所围成的球壳区域 (见 [2], [8]).

下面我们说明，线性弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 除满足强椭圆性条件 (5.6) 外，实际上还满足更强的条件．为了导出这一条件，我们考察弹性体内总机械能的转化情况．任取 $G_0\subset\Omega$，在一定时间内作用在 $G_0$ 上的外力及在 $G_0$ 边界 $S_0$ 上的应力所作的功，一部分体现为 $G_0$ 中动能的增加，而另一部分则作为变形能 (或称为应变能) 在 $G_0$ 中贮存起来．记单位体积的应变能为 $W$，那么 $G_0$ 中的总机械能为

$$\frac{1}{2}\int_{G_0}\rho_0\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}x+\int_{G_0}W\mathrm{d}x.$$

在单位时间内，作用在 $G_0$ 上的力所作的功为 (参见 (3.42) 式)

$$\begin{aligned}&\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}x+\int_{S_0}(\boldsymbol{Pn})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}S_0\\&=\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}x+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在得到上式右端的过程中，我们利用了格林公式．由以上讨论，就有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\int_{G_0}\rho_0\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}x+\int_{G_0}W\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\mathrm{d}x+\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5.24}$$

利用动量守恒方程 (3.44)，并注意应力张量 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 的对称性 (这由 (4.58) 与 (4.59) 式可以看出)，由上式易得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_0}W\mathrm{d}x&=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{G_0}p_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{G_0}p_{ij}\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再利用广义胡克定律 (4.58)，上式即可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_0}W\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\frac{1}{2}\int_{G_0}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\mathrm{d}x.\tag{5.25}$$

取弹性体在自然状态 (设 $t=0$ 时为这一状态) 下应变能密度函数 $W=0$, 对上式从 0 到 $t$ 积分, 并注意 $G_0 \subset \Omega$ 的任意性, 即有

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}. \tag{5.26}$$

这就是线性情况下贮能函数 (即应变能密度函数) 的表达式. 从物理上说, 只要应变张量 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})$ 不为零, $W$ 总应该是正的. 所以线性弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 的另一个合理的假设是下述稳定性条件.

**定义 5.2.** *若存在常数 $\widetilde{\alpha}>0$ 使*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \geqslant \widetilde{\alpha}|\boldsymbol{E}|^2 \tag{5.27}$$

*对一切对称矩阵 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})$ 成立, 其中 $|\boldsymbol{E}|^2=\sum\limits_{i,j=1}^{3} e_{ij}^2$, 则称 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足稳定性条件.*

强椭圆性条件 (5.6) 与稳定性条件 (5.27) 之间有什么关系呢？下面证明, 由稳定性条件可以推出强椭圆性条件. 事实上, 取

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\xi_i\eta_j+\xi_j\eta_i) \qquad (i,j=1,2,3),$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的对称性 (4.59), 由稳定性条件 (5.27) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l &= \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\\ &\geqslant \frac{\widetilde{\alpha}}{4}\sum_{i,j=1}^{3}(\xi_i\eta_j+\xi_j\eta_i)^2 \geqslant \frac{\widetilde{\alpha}}{2}|\boldsymbol{\xi}|^2|\boldsymbol{\eta}|^2.\end{aligned}$$

这就是强椭圆性条件. 但反之不然. 这可由下面对各向同性材料的讨论看出. 对于各向同性材料, 可以证明 (见习题 8): 稳定性条件 (5.27) 等价于要求拉梅常数 $\lambda$ 及 $\mu$ 满足

$$\mu>0, \qquad \kappa=\lambda+\frac{2}{3}\mu>0. \tag{5.28}$$

(比较 (5.7) 式 !)

在下面关于稳态问题的讨论中，稳定性条件将起着重要的作用.

## 5.2. 非线性弹性动力学方程组

假定已知弹性材料的本构关系 (4.2), 则由彼奥拉应力张量的定义 (3.39) 有

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})), \tag{5.29}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}) = \det \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$. 将 (5.29) 式代入动量守恒方程 (3.44), 就得到如下非线性弹性动力学的基本方程组:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(\nabla \boldsymbol{y}) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5.30}$$

其中

$$a_{ijkl}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial p_{ij}}{\partial f_{kl}}. \tag{5.31}$$

四阶张量 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl}(\boldsymbol{F}))$ 称为弹性张量. 显然, 我们也可以将 (5.30) 式写为关于位移向量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ 的方程组.

如果材料是超弹性的, 由 (4.18) 与 (5.31) 式有

$$a_{ijkl}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial f_{ij} \partial f_{kl}}, \tag{5.32}$$

其中 $\hat{W}$ 为贮能函数. 此时弹性张量 $\boldsymbol{A}$ 显然具有对称性:

$$a_{ijkl}(\boldsymbol{F}) = a_{klij}(\boldsymbol{F}). \tag{5.33}$$

在对弹性动力学方程组及对弹性静力学 (即稳态情况, 见下节) 方程组的讨论中, 基本问题之一是如何对响应函数或弹性张量给出在物理上合理的假设, 使得能对这些方程组在数学上进行有效的分析.

首先我们假定 $\boldsymbol{A}$ 满足如下强椭圆性条件 (其合理性下面还会论及).

**定义 5.3.** 若弹性张量 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl}(\boldsymbol{F}))$ 满足以下要求:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(\boldsymbol{F}) \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l > 0,$$

$$\forall \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \det \boldsymbol{F} > 0, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \tag{5.34}$$

则称它满足强椭圆性条件，其中 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 表示实的 $3\times 3$ 阵的全体.

若弹性张量 $\boldsymbol{A}$ 满足强椭圆性条件，我们称方程组 (5.30) 为双曲型的. 这样，(5.30) 就是一个二阶拟线性双曲型方程组. 其定解问题的提法与前述的线性情况类似，即可以提柯西 (初值) 问题与混合初 – 边值问题. 其混合初 – 边值问题中边界条件的典型提法和线性情形类似，可以是

$$\boldsymbol{y}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.35}$$

或

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.36}$$

或如下的混合情况

$$\boldsymbol{y}|_{\Gamma_1}=\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_2}=\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}), \tag{5.37}$$

其中 $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2=\partial\Omega$. 这里 $\boldsymbol{h}$ 及 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 $t,\boldsymbol{x}$ 的已知的适当光滑的向量函数，但有时 $\boldsymbol{\sigma}$ 也会依赖于未知函数 $\boldsymbol{y}$, 甚至其切向偏导数 (见 §6, 例 6.1).

对非线性弹性动力学方程组定解问题的研究仍很不充分. 目前的主要结果基本上都是关于解的局部存在性的，即解在初始时刻附近的存在性. 对整体解，即对时间 $t$ 在大范围内的解 (无论是经典解还是弱解) 的存在性的研究，除少数特殊情况外，还基本上没有什么结果.

### 5.3. 非线性弹性动力学方程组的一阶守恒律形式

在讨论弹性动力学方程组时，将其写为守恒律形式的一阶偏微分方程组有时是很方便的，特别是在讨论激波等重要问题时更是如此.

作为一种可能的选择，可采取如下办法将 (5.30) 化为守恒律形式的一阶方程组. 注意到 (2.3) 式，可将 (5.30) 式写为如下的等价形式：

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial t}-\frac{\partial v_k}{\partial x_l}=0\qquad (k,l=1,2,3), \tag{5.38}$$

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}p_{ij}(\boldsymbol{F})-\rho_0 b_i=0\quad (i=1,2,3). \tag{5.39}$$

令 $U=(f_{11},f_{12},\cdots,f_{33},v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$, 并为简单计取 $\rho_0=1$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 方程组 (5.38)—(5.39) 就可写为如下守恒律形式的一阶拟线性方程

组:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}V_j(U)=0, \tag{5.40}$$

其中 $V_1=-(v_1,0,0,v_2,0,0,v_3,0,0,p_{11},p_{21},p_{31})^{\mathrm{T}}$, $V_2=-(0,v_1,0,0,v_2,0,0,v_3,0,p_{12},p_{22},p_{32})^{\mathrm{T}}$, $V_3=-(0,0,v_1,0,0,v_2,0,0,v_3,p_{13},p_{23},p_{33})^{\mathrm{T}}$.

下面我们来讨论方程组 (5.40) 的类型. 为此将其写为如下形式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}B_j(U)\frac{\partial U}{\partial x_j}=0, \tag{5.41}$$

其中

$$B_j(U)=\nabla_U V_j, \qquad (j=1,2,3), \tag{5.42}$$

这里 $\nabla_U$ 表示对 $U$ 求梯度, 故 $B_j$ 为 $12\times 12$ 阵.

**定义 5.4.** 如果对所考察区域中的 $U$ 值及对任意给定的 $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, 矩阵

$$\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})=\sum_{j=1}^{3}\eta_j B_j(U) \tag{5.43}$$

有 $n(=12)$ 个实特征值

$$\lambda_1(U,\boldsymbol{\eta}),\cdots,\lambda_n(U,\boldsymbol{\eta}),$$

并且相应于这些特征值有 $n$ 个线性无关的特征向量, 则称方程组 (5.41) 为双曲型方程组.

下面我们证明: 如果弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.34), 则一阶方程组 (5.41) 在定义 5.4 的意义下是双曲型的. 为此, 首先考察 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的特征值. 由 $B_j$ 及 $V_j$ 的定义, 不难看出

$$B_j(U)=\begin{pmatrix}0 & -E_j\\ -A_j & 0\end{pmatrix} \quad (j=1,2,3), \tag{5.44}$$

其中

$$A_j=\begin{pmatrix}a_{1j11} & a_{1j12} & \cdots & a_{1j33}\\ a_{2j11} & a_{2j12} & \cdots & a_{2j33}\\ a_{3j11} & a_{3j12} & \cdots & a_{3j33}\end{pmatrix} \quad (j=1,2,3) \tag{5.45}$$

为 $3\times 9$ 阵，而

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{5.46}$$

所以

$$\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})=-\begin{pmatrix}0&\sum\limits_{j=1}^{3}\eta_jE_j\\ \sum\limits_{j=1}^{3}\eta_jA_j&0\end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

利用行列式的运算法则，不难验证

$$\det(\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})-\lambda I)=\lambda^6\det\left(\lambda^2\delta_{ik}-\sum_{j,l=1}^{3}a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right), \tag{5.48}$$

其中 $I$ 为单位阵，而 $\delta_{ik}$ 为克罗内克记号. 这说明 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 有一个 6 重零特征值. 此外，由 (5.33) 式及强椭圆性条件 (5.34) 可知， $3\times 3$ 阵 $\left(\sum\limits_{j,k=1}^{3}a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right)$ 是对称正定的，所以它有 3 个正特征值. 因此，$\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的另外 6 个特征值分别为 $\left(\sum\limits_{j,l=1}^{3}a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right)$ 特征值的平方根.

现在考察 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的特征向量.

**引理 5.1.** 对任何给定的 $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$，矩阵 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 相应于零特征值有 6 个线性无关的特征向量.

**证明** 设 $(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{12})^{\mathrm{T}}$ 为 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 相应于零特征值的特征向量. 由 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的前 9 行，立得

$$\eta_i\omega_{10}=\eta_i\omega_{11}=\eta_i\omega_{12}=0\qquad(i=1,2,3).$$

因为 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 不同时为零，上式给出

$$\omega_{10} = \omega_{11} = \omega_{12} = 0.$$

这样，$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{12})$ 最多只有 9 个自由度. 由 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的表达式 (5.47) 可见，为证明引理的结论，只要说明 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的最后三行是线性无关的. 设存在 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, 使分别用 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 乘 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的第 10, 11, 12 行并相加后得一零向量，即成立

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij11}\xi_i\eta_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij12}\xi_i\eta_j = \cdots = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij33}\xi_i\eta_j = 0.$$

将上式左起第 1 式乘以 $\xi_1\eta_1$, 第 2 式乘以 $\xi_1\eta_2, \cdots$, 第 9 式乘以 $\xi_3\eta_3$, 然后相加，即得

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\xi_i\xi_k\eta_j\eta_l = 0.$$

利用强椭圆性条件 (5.34), 由上式立即得到 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. 引理证毕.

**引理 5.2.** 设材料是超弹性的，那么对任何给定的 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, 矩阵 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 相应于非零特征值有 6 个线性无关的特征向量.

**证明** 设 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{12})^{\mathrm{T}}$ 为相应于矩阵 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的非零特征值 $\lambda$ 的特征向量. 由 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的前 9 行，可得

$$\begin{cases} \lambda\omega_1 + \eta_1\omega_{10} = \lambda\omega_2 + \eta_2\omega_{10} = \lambda\omega_3 + \eta_3\omega_{10} = 0, \\ \lambda\omega_4 + \eta_1\omega_{11} = \lambda\omega_5 + \eta_2\omega_{11} = \lambda\omega_6 + \eta_3\omega_{11} = 0, \\ \lambda\omega_7 + \eta_1\omega_{12} = \lambda\omega_8 + \eta_2\omega_{12} = \lambda\omega_9 + \eta_3\omega_{12} = 0. \end{cases} \tag{5.49}$$

注意 $\lambda \neq 0$, 记

$$\alpha_i = -\eta_i/\lambda \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5.50}$$

$$\xi_1 = \omega_{10}, \quad \xi_2 = \omega_{11}, \quad \xi_3 = \omega_{12}, \tag{5.51}$$

由 (5.49) 式就有

$$\begin{cases} \omega_1 = \alpha_1\xi_1, \quad \omega_2 = \alpha_2\xi_1, \quad \omega_3 = \alpha_3\xi_1, \\ \omega_4 = \alpha_1\xi_2, \quad \omega_5 = \alpha_2\xi_2, \quad \omega_6 = \alpha_3\xi_2, \\ \omega_7 = \alpha_1\xi_3, \quad \omega_8 = \alpha_2\xi_3, \quad \omega_9 = \alpha_3\xi_3. \end{cases} \tag{5.52}$$

注意到 (5.50)—(5.52) 诸式，相应于 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的第 10, 11, 12 行，特征向量应满足的关系式分别为

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\eta_j\eta_l\xi_k - \lambda^2\xi_i = 0 \qquad (i=1,2,3). \tag{5.53}$$

这说明 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\left(\sum\limits_{j,l=1}^{3} a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right)$ 相应于特征值 $\lambda^2$ 的特征向量. 反之，若 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\left(\sum\limits_{j,l=1}^{3} a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right)$ 相应于特征值 $\lambda^2 > 0$ 的特征向量，那么由 (5.51)—(5.52) 式给出的 $\omega = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{12})^{\mathrm{T}}$ 就是矩阵 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的相应于特征值 $\lambda$ 的特征向量. 于是, 对于矩阵 $\left(\sum\limits_{j,l=1}^{3} a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right)$ 的每一个 (相应于特征值 $\lambda^2 > 0$ 的) 特征向量，我们得到矩阵 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 的两个 (分别相应于特征值 $\lambda$ 与 $-\lambda$ 的) 特征向量. 如前所述，当材料为超弹性的 (此时 (5.33) 式成立)，$\left(\sum\limits_{j,l=1}^{3} a_{ijkl}\eta_j\eta_l\right)$ 为对称正定阵，故有三个相互正交的特征向量. 这样，就得到相应于 $\Lambda(U,\boldsymbol{\eta})$ 非零特征值的 6 个特征向量. 不难验证，它们是线性无关的. 引理证毕.

由以上讨论，我们有

**定理 5.1.** *设材料为超弹性的，且设弹性张量 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件，那么一阶拟线性偏微分方程组 (5.38)—(5.39) 在定义 5.4 的意义下是双曲型的.*

在讨论纯弹性变形时，我们不考虑热效应，并认为一切变形都是在等温的条件下完成的. 但是如果要研究方程组 (5.38)—(5.39) 的间断解，由于在解的间断面附近，应力与应变要发生急剧的变化，这时就不能忽略热效应的影响. 由于热效应必然伴随着机械能的耗散，过程不再可逆，弹性体的物理熵要增加. 所以在研究一阶守恒律方程组 (5.38)—(5.39) 的间断解时，还要补充一个反映熵增加的不等式，称为*熵不等式*. 熵不等式一般取为如下形式

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(U) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}q_j(U) \leqslant 0, \tag{5.54}$$

其中 $\eta$ 称为 熵, 而 $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ 则称为 熵流 (注意: 这里定义的熵及熵流与真正的物理熵及熵流相差一个负号).

下面讨论如何给出熵及熵流. 任取区域 $G_0\subset\Omega$, $G_0$ 中的总机械能为

$$\int_{G_0}(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+\hat{W}(\boldsymbol{F}))\mathrm{d}x,$$

其中 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 为贮能函数. $G_0$ 的边界 $S_0$ 上的应力在单位时间内对 $G_0$ 所作的功为

$$\int_{S_0}(\boldsymbol{Pn})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_0=\int_{G_0}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)\mathrm{d}x.$$

这里我们利用了格林公式. 考虑到机械能的耗散效应, 应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_0}(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+\hat{W}(\boldsymbol{F}))\mathrm{d}x-\int_{G_0}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由于上式对任意 $G_0\subset\Omega$ 成立, 所以有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+\hat{W}(\boldsymbol{F}))-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)\leqslant 0. \tag{5.55}$$

因此, $\eta$ 与 $\boldsymbol{q}$ 的一个自然的取法为

$$\eta = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+\hat{W}(\boldsymbol{F}), \tag{5.56}$$

$$q_j = -\sum_{i=1}^{3}p_{ij}v_i \qquad (j=1,2,3). \tag{5.57}$$

但由于 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 一般不是 $\boldsymbol{F}$ 的凸函数 (见本章 §6), 所以由 (5.56) 式给出的通常不是凸熵.

### 5.4. 化弹性动力学方程组为一阶对称双曲组

一个重要而有趣的问题是, 能否将非线性弹性动力学方程组 (5.30) 化为一个一阶拟线性对称双曲组? 下面就一类特殊情况进行讨论.

设一个各向同性的弹性体的变形发生在参考构形附近, 而参考构形为弹性体的自然状态. 由定理 4.3 与 (5.31) 式不难得到 (参见 (4.61) 式)

$$a_{ijkl}(\boldsymbol{I})=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{5.58}$$

我们知道，$(a_{ijkl}(\boldsymbol{I}))$ 满足强椭圆性假设等价于 (5.7) 式，并进而假定

$$\lambda+2\mu>\mu>0. \tag{5.59}$$

由于贮能函数 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 一般不是 $\boldsymbol{F}$ 的凸函数 (见本章 §6)，弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 一般来说不是正定的. 但在我们下面的化法中，却要求某种正定性. 为此，如 [8] 中所作的那样，代替 $(a_{ijkl})$，引入张量

$$\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F})=a_{ijkl}(\boldsymbol{F})+\mu(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{5.60}$$

张量 $(\widetilde{a}_{ijkl})$ 仍具有如下的对称性：

$$\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F})=\widetilde{a}_{klij}(\boldsymbol{F}). \tag{5.61}$$

又由于

$$\begin{aligned}&\sum_{j,k,l=1}^{3}(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{jk})\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_j}\\ &=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_k\partial x_i}=0,\end{aligned} \tag{5.62}$$

易知方程组 (5.39) 可以写为 (注意已设 $\rho_0=1$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}-\sum_{j,k,l=1}^{3}\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F})\frac{\partial}{\partial x_j}f_{kl}=0 \qquad (i=1,2,3). \tag{5.63}$$

此外，当 $|\nabla\boldsymbol{u}|$ 充分小时，张量 $(\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F}))$ 是正定的，即对任意给定的 $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_{ij})\in\mathbb{R}^{3\times3}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$，成立

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F})\zeta_{ij}\zeta_{kl}>0. \tag{5.64}$$

事实上，由 (5.58)—(5.60) 式，我们有

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{I})\zeta_{ij}\zeta_{kl}=(\lambda+\mu)(\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta})^2+\mu|\boldsymbol{\zeta}|^2>0, \tag{5.65}$$

其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta}=\sum\limits_{i=1}^{3}\zeta_{ii}$ 而 $|\boldsymbol{\zeta}|^2=\sum\limits_{i,j=1}^{3}|\zeta_{ij}|^2$. 由此立即得到 (5.64) 式在 $|\nabla\boldsymbol{u}|$ 充分小时成立.

将张量 $(\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F}))$ 视为一对称正定的 $9\times 9$ 阵 $\widetilde{A}$, 以 $\widetilde{A}$ 左乘方程组 (5.38), 则得如下方程组:

$$\sum_{p,q=1}^{3}\widetilde{a}_{klpq}(\boldsymbol{F})\frac{\partial f_{pq}}{\partial t}-\sum_{p,q=1}^{3}\widetilde{a}_{klpq}(\boldsymbol{F})\frac{\partial v_p}{\partial x_q}=0$$
$$(k,l=1,2,3). \tag{5.66}$$

由 $\widetilde{A}$ 的正定性知方程组 (5.66) 与 (5.38) 是等价的.

将方程组 (5.66) 与 (5.63) 联立, 并写为如下形式

$$K_0\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}K_j(U)\frac{\partial U}{\partial x_j}=0, \tag{5.67}$$

其中

$$K_0=\begin{pmatrix}\widetilde{A} & 0\\ 0 & I_{3\times 3}\end{pmatrix},\quad K_j=\begin{pmatrix}0 & -\widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}\\ -\widetilde{A}_j & 0\end{pmatrix}$$
$$(j=1,2,3), \tag{5.68}$$

而 $I_{3\times 3}$ 为 $3\times 3$ 单位阵, $\widetilde{A}_j$ 为 $3\times 9$ 阵, 由将 (5.45) 式给出的 $A_j$ 中的元素换为 $\widetilde{A}$ 中的相应元素而得. 显然, $K_0$ 为对称正定阵, $K_j$ $(j=1,2,3)$ 为对称阵. 因此, (5.67) 为一个一阶拟线性对称双曲组. 这样, 我们就证明了: 在假设 (5.59) 下, 变形在自然状态附近的各向同性材料的非线性弹性动力学方程组, 一定可以化为一阶对称双曲组. 对线性弹性动力学方程组, 上述结论当然也成立.

我们虽然已将方程组 (5.38)—(5.39) 化为一阶拟线性对称双曲组 (5.66) 及 (5.63). 但遗憾的是这个新的方程组已不具有守恒律的形式. 而且, 即使它可以重新被写为守恒律形式, 由于方程组 (5.66) 是以 $9\times 9$ 阵 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ijkl}(\boldsymbol{F}))$ 左乘方程组 (5.38) 得到的, 所以不能指望它在强间断面上与原方程组 (5.38) 满足相同的兰金 – 雨果尼奥条件 (对于高维的一阶拟线性守恒律双曲组, 在解的强间断面上, 仍成立类似于第二章 §4 中所论及的兰金 – 雨果尼奥条件). 也就是说, 这样得到的方程组即使可以写为守恒律的形式, 也只在经典解的范围内等价于原方程组. 但对于本段所讨论的情况, 在本质上不改变原守恒律的条件下, 利用引进新未知函数的方法, 仍可将方程组化为在守恒律形式下的一阶拟线性对称双曲组.

代替 (5.56) 式，取

$$\eta = \hat{W}(\boldsymbol{F}) + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})f_{ij}f_{kl} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2, \qquad (5.69)$$

其中 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 为材料的贮能函数. 容易看出, 对由 (5.56) 式给出的熵函数作上述修改后, 由 (5.69) 式给的 $\eta$ 关于 $U = (f_{11}, \cdots, f_{33}, v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ 分量的二阶偏导数形成的矩阵 $\dfrac{\partial^2\eta}{\partial U^2}$ 恰为 (5.68) 式中的正定阵 $K_0$:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial U^2} = K_0 > 0. \qquad (5.70)$$

这说明由 (5.69) 给出的 $\eta$ 为凸熵.

下面我们说明, 由 (5.69) 式给出的 $\eta$ 满足如下的附加守恒律:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0, \qquad (5.71)$$

其中

$$q_j = -\sum_{i=1}^{3}p_{ij}v_i - \mu\sum_{i,k,l=1}^{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})v_i f_{kl} \quad (j = 1, 2, 3). \qquad (5.72)$$

事实上, 由上一段的讨论可以看出, 在经典解的范围内 (这时没有机械能的耗散), 若 $\eta$ 与 $\boldsymbol{q}$ 分别取由 (5.56) 与 (5.57) 给出的形式, 则守恒律 (5.71) 成立. 这样, 为验证当 $\eta$ 与 $\boldsymbol{q}$ 由 (5.69) 及 (5.72) 式给出时, 守恒律 (5.71) 仍成立, 只需证明

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})f_{ij}f_{kl} - 2\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}((\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})v_i f_{kl}) = 0. \qquad (5.73)$$

利用方程组 (5.38) 以及 (5.62) 式容易验证上式的正确性, 其具体的推导过程留给读者, 此处从略.

这样，由第二章定理 1.1 知，守恒律形式的方程组 (5.38)—(5.39) 对新未知函数 $Z = \dfrac{\partial \eta}{\partial U} = (\dfrac{\partial \eta}{\partial f_{11}}, \cdots, \dfrac{\partial \eta}{\partial v_3})^{\mathrm{T}}$ 而言为拟线性一阶对称双曲组.

对于一般的非线性弹性动力学方程组，利用第二章定理 1.1 可以证明，如果其贮能函数是严格多凸的 (多凸的概念见本章 §6 定义 6.1)，则也可将其化为守恒定律形式下的一阶拟线性对称双曲组 (见 [12]).

### 5.5. 一维非线性弹性动力学方程

这一段我们讨论两种可以化为一维问题来进行讨论的情况.

**1° 各向同性材料的纯轴向变形**

假定材料只在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向产生变形，而且该变形只依赖于 $t$ 与 $x_1$，而与 $x_2$ 及 $x_3$ 无关. 这种纯轴向变形由下式给出

$$y_1 = x_1 + u_1(t, x_1), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3. \tag{5.74}$$

这时显然有

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而左柯西 - 格林应变张量

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这样，由定理 4.1 知，柯西应力张量 $T$ 必有如下形式

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ 0 & t_{22}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & t_{33}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \end{pmatrix}.$$

而彼奥拉应力张量则为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} t_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)t_{22}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)t_{33}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{P}$ 的上述表达式可见，对这种变形，弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 的分量除 $a_{1111}, a_{2211}$ 及 $a_{3311}$ 外均为零. 而强椭圆性条件 (5.34) 则意味着上述三个分量均为正，特别有

$$a_{1111}=\frac{\partial t_{11}}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)}>0. \tag{5.75}$$

这样，动量守恒方程 (3.44) 中的第一个方程化为

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}t_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\rho_0 b_1. \tag{5.76}$$

因此，这种纯轴向变形就化为由 (5.76) 式描述的一维问题；而 (5.75) 式说明，方程 (5.76) 是一个 *一维拟线性波动方程*.

需要说明的是，由 (5.74) 式给出的这种变形在实际上是很难实现的. 对真正的弹性杆而言，由轴向拉伸与压缩所产生的变形并不能由它来描述. 此外，对不可压缩材料，这种变形是根本不可能的.

**2° 各向同性材料的纯剪切变形**

这种变形也只发生在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向，但该变形只依赖于 $t$ 与 $x_2$ (或 $x_3$)，即有如下形式：

$$y_1=x_1+u_1(t,x_2),\quad y_2=x_2,\quad y_3=x_3. \tag{5.77}$$

此时显然有

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&\gamma&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

其中 $\gamma=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$. 其相应的左柯西 – 格林应变张量为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\gamma^2&\gamma&0\\\gamma&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{B}$ 的三个主不变量则分别为

$$I_1=3+\gamma^2,\quad I_2=3+\gamma^2,\quad I_3=1.$$

注意

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} (1+\gamma^2)^2+\gamma^2 & \gamma(1+\gamma^2)+\gamma & 0 \\ \gamma(1+\gamma^2)+\gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由定理 4.1 知,

$$t_{13} = t_{23} = 0, \tag{5.78}$$

$$t_{12} = \gamma\mu(\gamma^2), \tag{5.79}$$

其中 $\mu(\gamma^2)$ 为 $\gamma^2$ 的函数，称为广义剪切模量. 此时易知，彼奥拉应力张量为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} t_{11}-\gamma t_{12} & t_{12} & 0 \\ t_{21}-\gamma t_{22} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}.$$

因为应力张量 $\boldsymbol{P}$ 只依赖于 $\gamma = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$, 所以弹性张量 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl})$ 的分量中,除 $a_{1112}, a_{1212}, a_{2112}, a_{2212}$ 及 $a_{3312}$ 外均为零. 取 $\boldsymbol{\xi} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\eta} = (0,1,0)$, 由强椭圆性条件 (5.34) 可得

$$a_{1212} = \frac{dt_{12}(\gamma)}{d\gamma} > 0. \tag{5.80}$$

在这种变形下，动量守恒方程 (3.44) 中的第一个方程化为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} t_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \rho_0 b_1. \tag{5.81}$$

这样，纯剪切变形问题就化为一维问题；而 (5.80) 说明方程 (5.81) 是一个一维拟线性波动方程.

## §6. 弹性静力学方程组的定解问题

本节讨论稳态问题，即讨论弹性体达到平衡状态时的情况. 此时，弹性体的变形不再依赖于时间 $t$, 也就是说 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 只与 $\boldsymbol{x}$ 有关.

### 6.1. 线性弹性静力学方程组

对于线性情况的平衡状态，弹性力学的基本方程组 (5.2) 化为

$$-\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho_0 b_i \quad (i=1,2,3), \tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 自然也只是 $\boldsymbol{x}$ 的函数. 假定弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.6), 方程组 (6.1) 就是一个二阶线性椭圆型方程组. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界区域, 则方程组 (6.1) 的典型定解问题是: 在 $\Omega$ 中求该方程组的解 $\boldsymbol{u}$, 使其在 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 上满足形如 (5.9) 或 (5.10) 的边界条件. 当然, 此时 $\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 均不依赖于 $t$.

对于椭圆型方程组, 即使对具边界条件 (5.9) 的最常见的定解问题, 仅仅使方程组的类型保持椭圆性一般并不足以保证解的唯一性. 这只要注意到椭圆型方程 (组) 相应的特征值问题, 就不难看出这一点. 但从力学上说, 如果弹性体变形前为自然状态, 那么在无外力、且弹性体边界上的点保持不变 (即位移为零) 的条件下, 自然状态应是唯一的平衡状态. 因此, 线性边值问题 (6.1) 及 (5.9) 的解应该是唯一的. 这一点恰可由稳定性条件 (5.27) 予以保证.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足稳定性条件 (5.27), 那么不难验证

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) &\overset{\mathrm{d}}{=} \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \tilde{\alpha}\int_\Omega |\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{6.2}$$

进而我们有

**定理 6.1 (柯恩 (Korn) 不等式)** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界区域, 则存在常数 $C_0>0$ 使得对一切 $\boldsymbol{u}\in(H_0^1(\Omega))^3$, 成立

$$\int_\Omega |\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x \geqslant C_0\|\boldsymbol{u}\|^2_{(H^1(\Omega))^3}, \tag{6.3}$$

其中 $H_0^1(\Omega)$ 及 $H^1(\Omega)$ 均为索伯列夫空间 (见 [4]).

不熟悉索伯列夫空间的读者可将定理 6.1 中的 $\boldsymbol{u}$ 理解为在边界

$\partial\Omega$ 上取零值的连续可微的向量函数. 在 (6.3) 式中, $\|\boldsymbol{u}\|^2_{(H^1(\Omega))^3} = \|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \sum_{i,j=1}^{3}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$.

**定理 6.1 的证明** 只需对在 $\partial\Omega$ 上取零值且充分光滑的向量函数 $\boldsymbol{u}$ 证明 (6.3) 式. 记

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + r_{ij}, \tag{6.4}$$

其中

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

于是有

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = e_{ij}^2 - r_{ij}^2. \tag{6.5}$$

利用格林公式, 并注意到 $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, 有

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

这样, 由 (6.5) 及 (6.6) 式, 得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega r_{ij}^2\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_\Omega |\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.7}$$

由 (6.4) 式又有

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \leqslant 2(e_{ij}^2 + r_{ij}^2). \tag{6.8}$$

由以上两式立得

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant 4\int_\Omega |\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x. \tag{6.9}$$

(6.9) 式结合熟知的弗利德里克斯 (K. O. Friedrichs) 不等式 (见 [1]):

$$\int_{\Omega}|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant C_1\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}x,$$

即给出 (6.3) 式. 上式中 $C_1$ 是一个仅依赖于区域 $\Omega$ 的正常数. 定理 6.1 证毕.

**注 6.1.** 在一般情况下, 柯恩不等式有如下形式:

$$\int_{\Omega}|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}x+\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^3}\geqslant C_0\|\boldsymbol{u}\|^2_{(H^1(\Omega))^3},\quad \forall \boldsymbol{u}\in(H^1(\Omega))^3 \tag{6.10}$$

(见 [4]).

由 (6.2) 式与柯恩不等式 (6.3), 我们有

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\geqslant\alpha_0\|\boldsymbol{u}\|^2_{(H^1(\Omega))^3},\quad \forall \boldsymbol{u}\in(H^1_0(\Omega))^3, \tag{6.11}$$

其中 $\alpha_0>0$ 为一正常数.

由不等式 (6.11) 立即可得边值问题 (6.1) 及 (5.9) 的解的唯一性. 为此, 只要证明相应的齐次定解问题 (即 $\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{h}\equiv\boldsymbol{0}$ 的情况) 只有平凡解 $\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{0}$. 以 $u_i$ 乘方程 (6.1) 的两端, 对 $i$ 从 1 到 3 求和, 然后在 $\Omega$ 上积分, 可得

$$-\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_l}u_i\mathrm{d}x=0.$$

对上式左端利用格林公式, 就得到

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0.$$

这样, 再利用 (6.11) 式, 就立即得到 $\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{0}$. 这就证明了定解问题 (6.1) 及 (5.9) 的解的唯一性.

(6.11) 式实际上是关于椭圆定解问题的哥尔丁 (L.Gårding) 不等式的一个较强的形式. 借助于这一不等式, 利用泛函分析中的拉克斯 – 米尔格兰 (Lax–Milgram) 表示定理还可以证明上述定解问题的弱解的存在性. 然后可以进一步通过证明解的正则性而得到经典解.

这些内容读者可以在有关近代偏微分方程的教材中找到，这里就不详细讨论了.

### 6.2. 非线性弹性静力学方程组

对于弹性体在有限变形下的平衡状态，方程组 (5.30) 化为

$$-\sum_{j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}(\nabla \boldsymbol{y})\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho_0 b_i \quad (i=1,2,3), \tag{6.12}$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 不依赖于 $t$. 在弹性张量 $\boldsymbol{A}=(a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.34) 的假定下，方程组 (6.12) 是一个二阶拟线性椭圆型方程组. 其定解问题的提法是：在一有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中求方程组 (6.12) 的解，使其在 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 上满足形如 (5.35)、(5.36) 或 (5.37) 的边界条件. 当然，在稳态情况下，$\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 均与时间 $t$ 无关，但 $\boldsymbol{\sigma}$ 可能依赖于未知函数 $\boldsymbol{y}$, 甚至其切向偏导数.

**例 6.1.** 设弹性体的边界受压力的作用，而压力随空间不同点而变 (例如静水压力即如此). 记此压力为 $\pi(\boldsymbol{y})$. 在这种情况下，在弹性体的边界上应满足的边界条件为

$$\boldsymbol{T\nu} = -\pi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}, \quad 在\partial\Omega_1 上, \tag{6.13}$$

其中 $\partial\Omega_1$ 表示弹性体变形后在空间所占区域 $\Omega_1$ 的边界. 由于我们的讨论应在区域 $\Omega$ 中进行，所以必须将边界条件 (6.13) 化到区域 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 上去. 由引理 3.2 及 (3.39) 式可以看出，(6.13) 式可以化为

$$\boldsymbol{Pn} = -J\pi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}, \quad 在\partial\Omega 上. \tag{6.14}$$

不难验证，$J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}$ 在 $\partial\Omega$ 上只依赖于 $\boldsymbol{y}$ 的切向偏导数. 实际上，$J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} = \mathrm{cof}\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的余子式矩阵，故 $J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}$ 的第一个分量为

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

经过计算可以看出，它只含有对 $y_2$ 及 $y_3$ 的切向偏导数. 对第 2 及第 3 个分量可以类似地验证. 这样，边界条件 (6.14) 可写为如下形式:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}, \nabla_\tau \boldsymbol{y}), \quad 在\partial\Omega 上, \tag{6.15}$$

其中 $\nabla_\tau$ 表示切向梯度.

下面考察非线性弹性静力学方程组定解问题的解的存在性与唯一性. 物理上直观的例子说明 (见例 6.2), 三维弹性静力学问题唯一性不成立. 这就是说，一个合格的数学模型必须容许有几个、甚至无穷多个解.

**例 6.2.** 考察如下的纯位移问题：设参考构形 $\Omega$ 为两个同心球所围成的球壳，在 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 上给定边界条件

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad 在\partial\Omega 上. \tag{6.16}$$

在体积力 $\boldsymbol{b} \equiv 0$ 时，显然 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ 是方程组 (6.12) 满足上述边界条件的一个解. 但若保持外面的球面不动，而将内侧球面绕一个通过球心的轴旋转一个 $2\pi$ 的整数倍角度，这样形成的变形也是上述问题的解 (见图 7). 这样就得到了定解问题的无穷多个解.

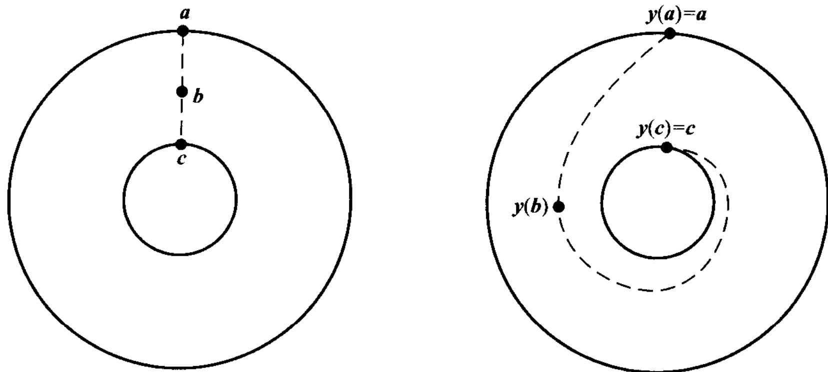



图 7

至于解的存在性的研究，也相当困难. 相对来说，对局部问题 (即变形在某已知变形的邻近) 的讨论比较容易进行. 但更有意义的是对大变形这种非局部问题的探讨. 研究这类问题的方法一般来说有：凸性与

单调算子的方法；延拓方法；拓扑方法与拓扑度理论；变分方法等．其中变分方法更为引人注目．下面我们对利用变分方法来求解时所可能遇到的困难，以及由此引出的贮能函数多凸性的概念作一简单介绍．

以方程组 (6.12) 在混合边界条件 (5.37) 下的定解问题为例来进行说明．假定 $\boldsymbol{h}$ 及 $\boldsymbol{\sigma}$ 都只是 $\boldsymbol{x}$ 的函数，而材料是超弹性的．定义如下的势能泛函：

$$\varPhi(\boldsymbol{y}) = \int_\Omega \hat{W}(\nabla \boldsymbol{y})\mathrm{d}x - \int_\Omega \rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y}\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{y}\mathrm{d}S_0, \tag{6.17}$$

其中 $\hat{W}$ 为贮能函数．上述右端第一项为弹性体的变形能，第二项为体积力势能，第三项是作用于 $\Gamma_2$ 上的表面力势能，因此， $\varPhi(\boldsymbol{y})$ 为弹性体的总势能．下面首先说明，求解边值问题 (6.12) 及 (5.37), 可以化为求上述泛函 $\varPhi(\boldsymbol{y})$ 的极小问题．

为使问题精确化，引入集合

$$D = \left\{\boldsymbol{y} \in (W^{1,p}(\Omega))^3, \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) > 0, \boldsymbol{y}|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{h}\right\},$$

其中 $W^{1,p}(\Omega)$ 为索伯列夫空间，而 $1 < p < \infty$.

设 $\boldsymbol{y}^0 \in D$ 使 $\varPhi(\boldsymbol{y})$ 在 $D$ 上达到极小值，即成立

$$\varPhi(\boldsymbol{y}^0) = \inf_{\boldsymbol{y}\in D} \varPhi(\boldsymbol{y}). \tag{6.18}$$

那么对任何满足条件

$$\boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{0} \tag{6.19}$$

的向量函数 $\boldsymbol{\phi} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$, 实值函数

$$\tau \mapsto \varPhi(\boldsymbol{y}^0 + \tau\boldsymbol{\phi})$$

在 $\tau = 0$ 时达到极小值，即成立

$$\left.\frac{d}{d\tau}\varPhi(\boldsymbol{y}^0 + \tau\boldsymbol{\phi})\right|_{\tau=0} = \boldsymbol{0}. \tag{6.20}$$

但由泛函 $\varPhi(\boldsymbol{y})$ 的表达式 (6.17), 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varPhi(\boldsymbol{y}^0 + \tau\boldsymbol{\phi})$$

$$= \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \hat{W}}{\partial f_{ij}} (\boldsymbol{F}^0 + \tau \nabla \boldsymbol{\phi}) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \rho_0 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\phi} \right) \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \mathrm{d}S_0, \tag{6.21}$$

其中 $\boldsymbol{F}^0 = \left( \dfrac{\partial y_i^0}{\partial x_j} \right)$. 由以上两式给出

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}(\boldsymbol{F}^0) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \rho_0 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\phi} \right) \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \mathrm{d}S_0 = 0. \tag{6.22}$$

若一向量函数 $\boldsymbol{y}^0 \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, 且满足边界条件 $\boldsymbol{y}^0|_{\Gamma_1} = \boldsymbol{h}$, 并使 (6.22) 式对一切上述的 $\boldsymbol{\phi}$ 成立, 就称 $\boldsymbol{y}^0$ 为边值问题 (6.12) 及 (5.37) 的弱解. 如果弱解 $\boldsymbol{y}^0 \in (C^2(\Omega))^3 \cap (C^1(\overline{\Omega}))^3$, 那么容易验证 $\boldsymbol{y}^0$ 为此边值问题的经典解. 这里要说明的是, 在对泛函 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 求极值的函数类 $D$ 中的函数, 并不要求它们满足在 $\Gamma_2$ 上的边界条件. 在 $\Gamma_2$ 上的边界条件是极值函数自然满足的, 称其为自然边界条件.

求解泛函 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 的极小值问题的通常步骤如下:

(a) 证明 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 在 $D$ 中下方有界. 这一点在一定假定下要加以验证通常并不困难;

(b) 在 $D$ 中求 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 的一个极小化序列 $\{\boldsymbol{y}^n\}$, 即满足下述条件的序列 $\{\boldsymbol{y}^n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\boldsymbol{y}^n) = \inf_{\boldsymbol{y} \in D} \Phi(\boldsymbol{y}). \tag{6.23}$$

然后在 $\{\boldsymbol{y}^n\}$ 中找一个子列 (为简单计, 仍记为 $\{\boldsymbol{y}^n\}$) 使当 $n \to \infty$ 时,

$$\boldsymbol{y}^n \rightharpoonup \boldsymbol{y}^0, \quad \text{在}(W^{1,p}(\Omega))^3 \text{ 中弱收敛}. \tag{6.24}$$

由 (a) 知 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 在 $D$ 中有下确界, 故必有极小化序列. 要找极小化序列的弱收敛子列, 一般依赖于对该序列的一些有界性估计. 这在一定假设下也是可以作到的;

(c) 对上述弱收敛子列, 证明

$$\Phi(\boldsymbol{y}^0) \leqslant \liminf_{n \to \infty} \Phi(\boldsymbol{y}^n). \tag{6.25}$$

一旦上式成立, 易知 $\boldsymbol{y}^0$ 就是使 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 取极小值的函数. (6.25) 式称为泛函 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 的序列弱下半连续性. 这样, 问题就转化为对一般的弹性体, 讨论势能泛函 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 是否具有序列弱下半连续性.

深入的讨论发现，对 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 序列弱下半连续性的要求将导致对贮能函数 $\hat{W}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 的凸性要求 (见 [6]). 那么，对一般的弹性体，贮能函数 $\hat{W}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 是否为凸呢？回答是令人失望的. 由于集合 $\{\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{3\times 3}, \det\boldsymbol{F}>0\}$ 不是凸集，可以证明： $\hat{W}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 的凸性与贮能函数的下述性质是违背的：

$$\text{当}\det\boldsymbol{F}\to 0\text{ 时,}\quad \hat{W}\to+\infty \tag{6.26}$$

(见 [4]). 这样，如果要求贮能函数 $\hat{W}$ 为凸，就会将一大批成功的贮能函数的模型 (见本章 §4.3) 排除在外. 这就说明， $\hat{W}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 的凸性假定与实际情况不符. 这样，问题的解决似乎进入了两难的境地. 但在这里，我们忽略了一个关键的信息： $\boldsymbol{F}$ 的分量并不是独立的，它们是一个向量函数的梯度. 因此， $\boldsymbol{F}$ 的分量满足如下关系式：

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}=\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j}, \tag{6.27}$$

即 $(f_{ij})$ 满足一组微分关系式的限制. 这就是说，如果我们在某一空间中得到弱收敛 $\boldsymbol{F}^n\rightharpoonup\boldsymbol{F}^0$, 那么实际上应该得到的远不止这些. 事实上，可以证明：若 $p>3$, 且

$$\boldsymbol{y}^n\rightharpoonup\boldsymbol{y}^0,\quad \text{在}(W^{1,p}(\Omega))^3\text{ 中弱收敛}, \tag{6.28}$$

那么

$$M^n\rightharpoonup M^0,\quad \text{在}L^{p/m}(\Omega)\text{ 中弱收敛}, \tag{6.29}$$

其中 $M^n$ 及 $M^0$ 分别表示与 $\boldsymbol{F}^n$ 及 $\boldsymbol{F}^0$ 相应的 $m\times m$ $(1\leqslant m\leqslant 3)$ 子行列式 (见 [3], [4]). 鉴于此，保尔 (J. Ball) 对贮能函数引进了较凸性为弱的多凸 (polyconvex) 的概念 (见 [3]).

**定义 6.1.** *若三阶方阵 $\boldsymbol{F}$ 的函数 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 能表示成为 $\boldsymbol{F}$ 的子行列式的凸函数，则称其为* 多凸 *的.*

假定贮能函数 $\hat{W}$ 是多凸的，那么它一定可以表示为如下的形式：

$$\hat{W}(\boldsymbol{F})=W^*(\boldsymbol{F},\mathrm{cof}\boldsymbol{F},\det\boldsymbol{F}), \tag{6.30}$$

其中 $\mathrm{cof}\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的余子式矩阵，而依赖于 19 个变量的函数

$$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},d)\mapsto W^*(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},d)$$

是凸的.

这样, 如果我们找到了泛函 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 的一个在空间 $(W^{1,p}(\Omega))^3$ 中弱收敛的极小化序列 $\{\boldsymbol{y}^n\}$:

$$\boldsymbol{y}^n \rightharpoonup \boldsymbol{y}^0, \quad 在 (W^{1,p}(\Omega))^3 中弱收敛, \tag{6.31}$$

那么由 (6.29) 式知, 此时必有

$$\operatorname{cof}\boldsymbol{F}^n \rightharpoonup \operatorname{cof}\boldsymbol{F}^0, \qquad 在 (L^{p/2}(\Omega))^9 中弱收敛, \tag{6.32}$$

$$\det \boldsymbol{F}^n \rightharpoonup \det \boldsymbol{F}^0, \qquad 在 L^{p/3}(\Omega) 中弱收敛. \tag{6.33}$$

于是就找到了一个序列 $(\boldsymbol{F}^n, \operatorname{cof}\boldsymbol{F}^n, \det \boldsymbol{F}^n)$ 在 $(L^{p/3}(\Omega))^{19}$ 中弱收敛于 $(\boldsymbol{F}^0, \operatorname{cof}\boldsymbol{F}^0, \det \boldsymbol{F}^0)$. 再由 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 的多凸性, 即 $W^*(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, d)$ 关于 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, d)$ 的凸性可推得泛函 $\Phi(\boldsymbol{y})$ 关于 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, d)$ 在 $(L^{p/3}(\Omega))^{19}$ 中的弱序列下半连续性. 这样就可完成解的存在性的证明.

在上述解的存在性的证明中, 并没有用到方程组 (6.12) 的强椭圆性这一假定. 但实际上, 由 $\hat{W}$ 的多凸性可以推得 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.34) (见 [3]).

由上述方法得到的弱解是否具有正则性, 即它是否是一个经典解, 除一维情况外, 仍然是个没有解决的问题. 此外, 设 $\boldsymbol{y}^0$ 是边值问题 (6.12) 及 (5.37) 的解, 那么从物理的角度说, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}^0(\boldsymbol{x})$ 应该是一个一一在上的映射. 我们现在得到的弱解是否满足这一要求, 也是一个有待研究的问题.

为了说明在本章 §4.3 中给出的大部分模型是多凸的, 我们证明下述定理.

**定理 6.2.** 设 $\Gamma: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 为凸函数, 那么由 (4.47) 给出的贮能函数

$$\begin{aligned}\hat{W}(\boldsymbol{F}) \;=\; & \sum_{i=1}^{M} a_i(\mu_1^{\alpha_i} + \mu_2^{\alpha_i} + \mu_3^{\alpha_i} - 3) \\ & + \sum_{i=1}^{N} b_i((\mu_2\mu_3)^{\beta_i} + (\mu_3\mu_1)^{\beta_i} + (\mu_1\mu_2)^{\beta_i} - 3) \\ & + \Gamma(\mu_1\mu_2\mu_3)\end{aligned} \tag{6.34}$$

为多凸的, 其中 $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ 为 $U = C^{1/2}$ 的主值, $a_i$, $b_i$, $\alpha_i$, $\beta_i$ 均

为非负常数.

**证明** 我们只对 $M = N = 1, \alpha_1 = \beta_1 = 2$ 的情况予以证明 (显然, 这包括由 (4.48) 式给出的材料). 对一般情况的证明可参阅 [4].

首先证明下述引理.

**引理 6.1.** 函数

$$g(\boldsymbol{F}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}), \qquad \forall \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{6.35}$$

是严格凸的.

**证明** 易见

$$g(\boldsymbol{F}) = \sum_{i,j=1}^{3} f_{ij}^2,$$

其二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{F})}{\partial f_{ij}\partial f_{kl}} = \begin{cases} 2, & 若 (i,j) = (k,l), \\ 0, & 若 (i,j) \neq (k,l). \end{cases}$$

因此, $9\times 9$ 阵 $\left(\dfrac{\partial^2 g(\boldsymbol{F})}{\partial f_{ij}\partial f_{kl}}\right)$ 是正定的. 这说明 $g(\boldsymbol{F})$ 为严格凸函数. 引理证毕.

**定理 6.2 证明的继续** 容易直接验证

$$\mathrm{cof}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) = (\mathrm{cof}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}\mathrm{cof}\boldsymbol{F}, \tag{6.36}$$

故由 (4.49) 的第二式, 有

$$(\mu_2\mu_3)^2 + (\mu_3\mu_1)^2 + (\mu_1\mu_2)^2 = \mathrm{tr}((\mathrm{cof}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}\mathrm{cof}\boldsymbol{F}). \tag{6.37}$$

这样, 注意到 (4.49) 式, (6.34) 式可以写为

$$\begin{aligned} \hat{W}(\boldsymbol{F}) \;=\; & a_1\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) + b_1\mathrm{tr}((\mathrm{cof}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}\mathrm{cof}\boldsymbol{F}) \\ & + \Gamma(\det\boldsymbol{F}) - 3(a_1 + b_1). \end{aligned} \tag{6.38}$$

由引理 6.1 知, (6.38) 式右端第一及第二项分别为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\mathrm{cof}\boldsymbol{F}$ 的凸函数. 又由定理假设, 第三项为 $\det\boldsymbol{F}$ 的凸函数. 所以 $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ 为多凸的. 证毕.

最后, 我们要指出的是: 圣维南 – 基尔霍夫材料的贮能函数 (见 (4.38) 式) 不是多凸的 (见 [4]).

## 习 题

1. 证明引理 2.1.

2. 验证 (3.6) 式，即证明

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J\mathrm{div}\,_y\boldsymbol{v}.$$

3. 试证明：在物质描述下，动量矩守恒定律等价于第二彼奥拉应力张量的对称性.

4. 设材料为超弹性的，并设参考构形为自然状态，证明由线性化得到的张量 $\boldsymbol{A} = (a_{ijkl}) = \left(2\dfrac{\partial \overline{p}_{ij}}{\partial c_{kl}}\right)$ 具有以下的对称性：

$$a_{ijkl} = a_{klij}.$$

5. 设超弹性材料的贮能函数 $\hat{W}$ 满足 (4.19) 式，证明由它决定的柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 满足客观性假设 (4.7) 式.

6. 设超弹性材料的贮能函数 $\hat{W}$ 满足 (4.37) 式，证明由它决定的柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 满足各向同性条件 (4.21) 式.

7. 在线性弹性情形，证明对各向同性材料，强椭圆性条件 (5.6) 等价于拉梅常数满足

$$\mu > 0, \qquad \lambda + 2\mu > 0.$$

8. 在线性弹性情形，证明对各向同性材料，稳定性条件 (5.27) 等价于拉梅常数满足

$$\mu > 0, \qquad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0.$$

9. 设 $3\times 3$ 阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 证明 $\mathrm{cof}\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_2\lambda_3, \quad \lambda_3\lambda_1, \quad \lambda_1\lambda_2.$$

10. 证明函数

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\det \boldsymbol{F}}, & \text{若} \det \boldsymbol{F} > 0, \\ +\infty, & \text{若} \det \boldsymbol{F} \leqslant 0 \end{cases}$$

是多凸的.

## 参考文献

[1] 谷超豪, 李大潜等. *数学物理方程*. 上海: 上海科学技术出版社, 1987

[2] 柯朗 R, 希尔伯特 D. *数学物理方法*, 卷 II. 熊振翔, 杨应辰译. 北京: 科学出版社, 1977

[3] Ball J. *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., 63 (1977). 337~403

[4] 希阿雷 P G. *数学弹性理论*, 卷 I: *三维弹性理论*. 石钟慈, 王烈衡译. 北京: 科学出版社, 1991

[5] Ciarlet P G, Geymonat G. *Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295 (1982). 423~426

[6] Evans L C. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations.* CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 74, 1990

[7] Gurtin M E. *Topics in Finite Elasticity.* CBMS-NCF, Regional Conference Series in Applied Mathematics 35, 1981

[8] John F. *Finite amptitude waves in a homogeneous isotropic elastic solid.* Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977). 421~446

[9] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer–Verlag, New York Inc., 1983

[10] 谷超豪, 李大潜, 沈玮熙. *应用偏微分方程*. 北京: 高等教育出版社, 1993

[11] Struwe M. *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990

[12] Qin Tiehu. *Symmetrizing Nonlinear Elastodynamic System.* Journal of Elasticity, 50 (1998). 245~252

# 附录一　笛卡儿张量

在理论物理及连续媒质力学中广泛使用着张量. 这不仅是为了书写的简练, 更主要是因为在物理及力学中出现的一些重要的物理量, 在本质上均不应依赖于坐标系的选取方式. 在本附录中, 我们考虑的坐标系均为笛卡儿直角坐标系, 相应的张量称为 笛卡尔张量.

**1. 张量的定义**

在选定的测量单位下, 只需利用一个和坐标系选取无关的数来表征其特征的量称为 标量. 例如数学上的常数 $\pi$ 及 e, 物理学中的质量、密度、温度以及能量等都是标量.

在选定的测量单位下, 由一个和坐标系选取无关的数及一个方向 (即大小及方向) 来表征其特征的量称为 向量. 例如数学上的有向线段, 力学中的位移、速度、力以及动量等均为向量.

但是我们知道, 向量也可以用它的坐标分量来描述并进行计算. 这时需要选定适当的坐标系来进行讨论. 同一向量在不同坐标系下有不同的坐标分量, 但由于它们描述的是同一向量, 在不同坐标系之下向量的坐标分量必须满足和坐标变换相匹配的变换规律. 而这个变换规律就是这个客观存在的向量独立于坐标系选取方式的反映. 因此, 向量可由其在给定坐标系下的坐标分量, 连同坐标系变换时其坐标分量的变换规律来刻画. 在这个概念的基础上进行延伸, 就可以得到张量的概念.

在笛卡儿坐标系下, 我们仅限于考虑笛卡儿坐标变换, 即平移、旋转及反射. 如果新旧坐标系都限定为右手系, 则只有平移和旋转.

设 $O'x_1'x_2'x_3'$ 及 $Ox_1x_2x_3$ 分别为新、旧右手直角坐标系, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ 及 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 分别为新、旧坐标系的单位坐标向量. 设

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

注意到

$$\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \tag{2}$$

其中 $\delta_{ij}$ 为克罗内克记号，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' &= \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\boldsymbol{e}_k \cdot \sum_{l=1}^{3} a_{jl}\boldsymbol{e}_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个正交阵. 由于只限于由右手系到右手系的坐标变换，应有 $\det \boldsymbol{A} = 1$. 由于正交阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})$，由 (1) 式有

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\boldsymbol{e}_j' \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

现在具体看在不同笛卡儿坐标系下向量坐标分量的变换规律. 设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,其在新、旧坐标系下的分量分别为 $(a_1', a_2', a_3')$ 及 $(a_1, a_2, a_3)$，于是

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_j'\boldsymbol{e}_j'. \tag{4}$$

由 (3)—(4) 式得

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_{ji}\boldsymbol{e}_j' = \sum_{j=1}^{3} a_j'\boldsymbol{e}_j'.$$

这意味着

$$a_j' = \sum_{i=1}^{3} a_{ji}a_i \quad (j = 1, 2, 3),$$

或写为

$$a_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}a_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

由于 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为正交阵，由 (5) 式易见

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}a_j' \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

(5) 与 (6) 的形式和坐标向量的变换式 (1) 及 (3) 相一致.

由此可得向量的另一种定义： 设一个量在每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下由三个分量 (数) $a_1$, $a_2$, $a_3$ 表示，而这些分量在坐标变换 (1) 下按 (5) 式进行转换，那么称此量为向量或一阶张量. 增加分量下标的个数，可以类似地定义二阶、三阶及更高阶的张量.

**二阶张量的定义**: 若一个量 $\boldsymbol{P}$ 在每一直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下由九个分量 (数) $p_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ 表示，且在坐标变换 (1) 下，这些分量按以下规律

$$p'_{ij}=\sum_{k,l=1}^{3}a_{ik}a_{jl}p_{kl}\quad(i,j=1,2,3)\tag{7}$$

转换为另一个直角坐标系 $O'x'_1x'_2x'_3$ 中的九个分量 $p'_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$, 则称量 $\boldsymbol{P}$ 为二阶张量. 记为

$$\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix},$$

其中 $p_{ij}$ 称为此二阶张量的分量.

上述定义不难推广到 $n$ 阶张量 $\boldsymbol{P}=\{p_{i_1i_2\cdots i_n}\}$. $n$ 阶张量 $\boldsymbol{P}$ 在每个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下有 $3^n$ 个分量 $p_{i_1i_2\cdots i_n}$ $(i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,3)$; 在坐标变换 (1) 下，其分量之间的转换关系则由

$$p'_{i_1i_2\cdots i_n}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n=1}^{3}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}p_{j_1j_2\cdots j_n}\quad(i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,3)\tag{8}$$

给出.

## 2. 张量的计算

### 1° 张量的加减与数乘

以二阶张量为例. 设 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 及 $\boldsymbol{Q}=\{q_{ij}\}$ 同为二阶张量，则 $\{p_{ij}\pm q_{ij}\}$ 仍为二阶张量，记为 $\boldsymbol{P}\pm\boldsymbol{Q}$, 即

$$\boldsymbol{P}\pm\boldsymbol{Q}=\{p_{ij}\pm q_{ij}\}.$$

设 $\alpha$ 为一标量，显然 $\{\alpha p_{ij}\}$ 仍为二阶张量，记为 $\alpha\boldsymbol{P}$, 即

$$\alpha\boldsymbol{P}=\{\alpha p_{ij}\}.$$

**2° 张量的乘积**

设 $\boldsymbol{P}=\{p_{i_1i_2\cdots i_m}\}$ 及 $\boldsymbol{Q}=\{q_{j_1j_2\cdots j_n}\}$ 分别为 $m$ 阶及 $n$ 阶张量，记

$$r_{i_1\cdots i_mj_1\cdots j_n}=p_{i_1\cdots i_m}q_{j_1\cdots j_n}.$$

容易验证，$\boldsymbol{R}=\{r_{i_1\cdots i_mj_1\cdots j_n}\}$ 为 $m+n$ 阶张量，称为 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的张量积，记为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$.

**例 1.** 设 $\boldsymbol{a}=\{a_i\}$ 及 $\boldsymbol{b}=\{b_i\}$ 均为向量，则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\{a_ib_j\}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$$

为二阶张量. 物理上通常称其为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的*并矢*.

**3° 张量的缩并**

设 $\boldsymbol{P}=\{p_{i_1i_2\cdots i_n}\}$ 为 $n$ 阶张量. 若对其分量 $p_{i_1i_2\cdots i_n}$ 的两个下标取相同之值，并对该下标从 1 到 3 求和，不难验证，这样就得到一个 $n-2$ 阶张量的分量. 这个 $n-2$ 阶张量称为张量 $\boldsymbol{P}$ 的*缩并*.

下面以按 $\boldsymbol{P}$ 的分量的最后两个下标缩并的情况予以说明. 设

$$q_{i_1i_2\cdots i_{n-2}}=\sum_{k=1}^{3}p_{i_1i_2\cdots i_{n-2}kk},$$

则 $\boldsymbol{Q}=\{q_{i_1i_2\cdots i_{n-2}}\}$ 为一个 $n-2$ 阶张量. 事实上，注意到 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为正交阵，有

$$\begin{aligned}q'_{i_1i_2\cdots i_{n-2}}&=\sum_{k=1}^{3}p'_{i_1i_2\cdots i_{n-2}kk}\\&=\sum_{k,j_1,\cdots,j_{n-2},r,s=1}^{3}a_{i_1j_1}\cdots a_{i_{n-2}j_{n-2}}a_{kr}a_{ks}p_{j_1\cdots j_{n-2}rs}\\&=\sum_{j_1,\cdots,j_{n-2},r,s=1}^{3}a_{i_1j_1}\cdots a_{i_{n-2}j_{n-2}}\delta_{rs}p_{j_1\cdots j_{n-2}rs}\end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_{n-2},r=1}^{3} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_{n-2}j_{n-2}} p_{j_1\cdots j_{n-2}rr}$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_{n-2}=1}^{3} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_{n-2}j_{n-2}} q_{j_1\cdots j_{n-2}}.$$

故 $\boldsymbol{Q}$ 为 $n-2$ 阶张量.

**例 2.** 并矢 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ 的缩并 $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i b_i$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积.

**例 3.** 设 $\{b_{ijkl}\}$ 为四阶张量, $\{\varepsilon_{ij}\}$ 为二阶张量, 则

$$\{t_{ij}\} = \left\{\sum_{k,l=1}^{3} b_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right\}$$

为二阶张量. 利用张量乘积与缩并的结果, 很容易说明这一点.

**例 4.** 设对任意给定的二阶张量 $\{\varepsilon_{ij}\}$,

$$\{t_{ij}\} = \left\{\sum_{k,l=1}^{3} b_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right\}$$

均为二阶张量, 则 $\{b_{ijkl}\}$ 必为四阶张量.

下面我们证明上述结论. 在新坐标系 $O'x_1'x_2'x_3'$ 下

$$t'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} b'_{ijkl}\varepsilon'_{kl}. \tag{9}$$

但由张量的定义

$$\begin{aligned} t'_{ij} &= \sum_{p,q=1}^{3} a_{ip}a_{jq}t_{pq} \\ &= \sum_{p,q,r,s=1}^{3} a_{ip}a_{jq}b_{pqrs}\varepsilon_{rs} \\ &= \sum_{p,q,r,s,k,l=1}^{3} a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}b_{pqrs}\varepsilon'_{kl}. \end{aligned} \tag{10}$$

由于 (9) 及 (10) 对一切二阶张量 $\{\varepsilon'_{kl}\}$ 均成立，故

$$b'_{ijkl} = \sum_{p,q,r,s=1}^{3} a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}b_{pqrs},$$

即 $\{b_{ijkl}\}$ 为四阶张量.

例 4 的结论通常称为张量识别定理. 不难证明，这个定理对任意阶的张量均成立.

### 3. 二阶对称张量的不变量

二阶张量 $\boldsymbol{P}$ 的不变量是指由该张量决定的、与坐标系选取无关的标量.

对于二阶张量 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$, 若存在非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, 使

$$\boldsymbol{Pa}=\lambda\boldsymbol{a}, \tag{11}$$

其中 $\lambda$ 为一标量，而 $\boldsymbol{Pa}=\left\{\sum\limits_{j=1}^{3}p_{ij}a_j\right\}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 的方向为张量 $\boldsymbol{P}$ 的主轴方向 (主方向), 称 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的主值.

张量 $\boldsymbol{P}$ 的主值 $\lambda$ 为其不变量，即在坐标变换下，成立

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{a}'=\lambda\boldsymbol{a}'. \tag{12}$$

事实上，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{a}')_i &= \sum_{j=1}^{3}p'_{ij}a'_j\\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^{3}a_{ik}a_{jl}p_{kl}a_{jm}a_m\\ &= \sum_{k,l,m=1}^{3}a_{ik}\delta_{lm}p_{kl}a_m\\ &= \sum_{k,l=1}^{3}a_{ik}p_{kl}a_l\\ &= \sum_{k=1}^{3}a_{ik}\lambda a_k=\lambda a'_i.\end{aligned}$$

这就是 (12) 式.

$\lambda$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的主值等价于 $\lambda$ 满足

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{aligned} &\lambda^3-\lambda^2(p_{11}+p_{22}+p_{33}) \\ &+\lambda\left(\begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}\right) \\ &-\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}=0. \end{aligned} \tag{13}$$

这是关于 $\lambda$ 的三次代数方程. 由根与系数的关系，得

$$\begin{aligned} I_1 &\overset{\mathrm{d}}{=} p_{11}+p_{22}+p_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \\ I_2 &\overset{\mathrm{d}}{=} \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1, \\ I_3 &\overset{\mathrm{d}}{=} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 为方程 (13) 的三个根. 由于 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 及 $\lambda_3$ 均为不变量，由以上三式给出的张量 $\boldsymbol{P}$ 分量的组合 $I_1$, $I_2$ 及 $I_3$ 均为不变量，称为张量 $\boldsymbol{P}$ 的 第一、第二及第三主不变量.

特别，若

$$p_{ij}=p_{ji} \quad (i,j=1,2,3), \tag{14}$$

则称 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 为二阶对称张量. 容易验证，这一定义不依赖于坐标系的选取. 对二阶对称张量 $\boldsymbol{P}$, 必存在三个实主值 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 及三个相互垂直的主轴. 取主轴为新的坐标轴，则对称张量 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 可写为如下形式:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

这说明二阶对称张量完全可以由其三个主值 $\lambda_1, \lambda_2$ 及 $\lambda_3$ 来表征，因此其一切不变量均可由 $\lambda_1, \lambda_2$ 及 $\lambda_3$ 表出．换言之， $\lambda_1, \lambda_2$ 及 $\lambda_3$ 本质上给出了 $P$ 的一切可能的不变量．但 $\boldsymbol{P}$ 的主值又可由其第一、第二及第三主不变量唯一确定，所以，二阶对称张量的一切不变量均可由其第一、第二及第三主不变量 $I_1, I_2$ 及 $I_3$ 给出．

**4. 各向同性张量**

绝大多数张量的分量经过坐标旋转变换后将改变其值．这种张量称为 各向异性张量．但也有一些张量，在坐标旋转变换下，每一分量均保持不变，这种张量称为 各向同性张量．严格地说，若 $n$ 阶张量 $\boldsymbol{H} = \{h_{i_1 i_2 \cdots i_n}\}$ 的每一分量均为坐标旋转变换下的不变量，即在坐标旋转变换下成立

$$\begin{aligned} h'_{i_1 i_2 \cdots i_n} &= h_{i_1 i_2 \cdots i_n} \\ & (i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{15}$$

则称 $\boldsymbol{H}$ 为各向同性的 $n$ 阶张量．例如标量 (零阶张量) 及 $\{\delta_{ij}\}$ 均为各向同性的．各向同性这一名称来源于物理．例如若四阶张量 $\{p_{ijkl}\}$ 中分量 $p_{1111}$ 表示某种材料在 $x_1$ 轴方向的拉伸弹性系数．当旋转到新的坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 时，张量为 $\{p'_{ijkl}\}$．此时分量 $p'_{1111}$ 表示该材料在 $x'_1$ 轴方向的拉伸弹性系数．如果材料是各向同性的，各方向的拉伸弹性系数应相同，这就应有 $p_{1111} = p'_{1111}$．

下面给出各向同性张量的一些具体形式．

**定理**．1) 二阶各向同性张量 $\boldsymbol{H} = \{h_{ij}\}$ 的一般形式为

$$h_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{16}$$

其中 $\lambda$ 为标量，而 $\delta_{ij}$ 为克罗内克记号．

2) 四阶各向同性张量 $\boldsymbol{H} = \{h_{ijkl}\}$ 的一般形式为

$$\begin{aligned} h_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha \delta_{ik}\delta_{jl} + \beta \delta_{il}\delta_{jk} \\ & (i, j, k, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\lambda, \alpha$ 及 $\beta$ 均为标量．

**证明** 我们只证 2)．首先，容易验证，由 (17) 式给出的四阶张量是各向同性的．其次证明，若 $\boldsymbol{H}$ 为各向同性的，则有

$$h_{ijkl}=\begin{cases}\lambda+\alpha+\beta, & 若 i=j=k=l, & (18_1)\\ \lambda, & 若 i=j\neq k=l, & (18_2)\\ \alpha, & 若 i=k\neq j=l, & (18_3)\\ \beta, & 若 i=l\neq j=k, & (18_4)\\ 0, & 其它情形. & (18_5)\end{cases}$$

一旦以上诸式得以证明，(17) 式自然成立.

因为 $\boldsymbol{H}$ 是各向同性的，由定义知

$$h_{ijkl}=h'_{ijkl}=\sum_{p,q,r,s=1}^{3}a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}h_{pqrs}. \tag{19}$$

下面的证明分四步完成.

1°) 作坐标变换

$$\boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}'_2=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}'_3=\boldsymbol{e}_1.$$

对此坐标变换，

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

将这个矩阵用于 (19) 式可见：对于 $h_{ijkl}$, 将其下标中 $1\to 2$, $2\to 3$, $3\to 1$, 分量值保持不变.

2°) 将坐标系绕 $x_3$ 轴旋转角度 $\pi$, 得一新的坐标系. 此时

$$\boldsymbol{e}'_1=-\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}'_2=-\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}'_3=\boldsymbol{e}_3,$$

相应地

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

将这个矩阵用于 (19) 式可见：该式右端的和式中，只有 $p=i$, $q=j$, $r=k$ 及 $s=l$ 的项不为零，且

$$h_{ijkl}=\pm h_{ijkl}. \tag{20}$$

(20) 式中的 "±" 号按以下规则选取：当且仅当 $i, j, k$ 及 $l$ 中有奇数个 3 时，上式右端取 "−" 号，其余情况取 "+" 号. 在 (20) 式右端取 "−" 号时，就有

$$h_{ijkl}=0. \tag{21}$$

由 1°) 知，在 $i, j, k$ 及 $l$ 中有奇数个 1 或奇数个 2 时，(21) 式亦成立. 这就证明了 $(18_5)$ 式.

3°) 将坐标系绕 $x_3$ 轴旋转角度 $\pi/2$, 得一新坐标系. 此时

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3,$$

相应地

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将此矩阵用于 (19) 式，得

$$h_{1122} = a_{12}a_{12}a_{21}a_{21}h_{2211} = h_{2211}. \tag{22}$$

由 1°) 得

$$h_{1122} = h_{2233} = h_{3311}, \tag{23}$$

$$h_{2211} = h_{3322} = h_{1133}. \tag{24}$$

由 (22)—(24) 诸式易证 $(18_2)$ 式成立. 类似地可证 $(18_3)$ 及 $(18_4)$ 式成立.

4°) 将坐标系绕 $x_3$ 轴旋转角度 $\pi/4$, 得一新坐标系. 此时有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2' &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_3' &= \boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

相应地

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

由 (19) 式，有

$$h_{1111} = \sum_{p,q,r,s=1}^{3} a_{1p}a_{1q}a_{1r}a_{1s}h_{pqrs}.$$

将矩阵 (25) 代入上式，容易看出：上式右端和式中，只有 $p, q, r$ 及 $s$ 均取 1 或 2 的这种项可能不为零. 进而，由 ($18_5$) 式知，仅当 $p, q, r$ 及 $s$ 中有偶数个 1 或偶数个 2 的这种项可能不为零. 所以

$$\begin{aligned} h_{1111} &= a_{11}^4 h_{1111} + a_{12}^4 h_{2222} + a_{11}^2 a_{12}^2 (h_{1122} \\ &\quad + h_{2211} + h_{1212} + h_{2121} + h_{1221} + h_{2112}) \\ &= \frac{1}{4}(h_{1111} + h_{2222} + h_{1122} + h_{2211} + h_{1212} \\ &\quad + h_{2121} + h_{1221} + h_{2112}). \end{aligned} \tag{26}$$

由 ($18_2$)—($18_4$) 有

$$h_{1122} = h_{2211} = \lambda,$$
$$h_{1212} = h_{2121} = \alpha,$$
$$h_{1221} = h_{2112} = \beta.$$

又由 1°) 得

$$h_{1111} = h_{2222} = h_{3333}.$$

这样，由 (26) 式就得到

$$h_{1111} = \lambda + \alpha + \beta.$$

($18_1$) 式得证. 定理证毕.

### 5. 张量的微分运算

前面讨论的张量可以是常张量，即每一分量在给定坐标系下都是常数；也可以是张量函数，即其分量为函数 (依赖某些参数或空间点的坐标). 若张量的分量仅为某些参变量的函数，那么一切微分运算均可按分量进行，情况比较简单. 这里重点讨论张量的分量为点坐标的函数的情形. 设在坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下，

$$\boldsymbol{P} = \{p_{i_1 i_2 \cdots i_n}(\boldsymbol{x})\}$$

为 $n$ 阶张量，即在新坐标系 $O'x_1'x_2'x_3'$ 下

$$p'_{i_1 i_2 \cdots i_n}(\boldsymbol{x}') = \sum_{j_1, \cdots, j_n = 1}^{3} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} p_{j_1 \cdots j_n}(\boldsymbol{x}), \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{x}'=(x_1',x_2',x_3')$. 下面定义该张量的几种微分运算.

**1) 梯度**

$\boldsymbol{P}$ 的梯度 $\nabla\boldsymbol{P}$ (或 grad $\boldsymbol{P}$) 定义为

$$\nabla\boldsymbol{P}=\{q_{i_1\cdots i_n k}\}, \tag{28}$$

其中

$$q_{i_1\cdots i_n k}=\frac{\partial p_{i_1\cdots i_n}}{\partial x_k}. \tag{29}$$

下面说明以上定义的 $\{q_{i_1\cdots i_n k}\}$ 为一个 $n+1$ 阶张量. 事实上

$$\begin{aligned}
q'_{i_1\cdots i_n k} &= \frac{\partial p'_{i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_k} \\
&= \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x'_k}(a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_n j_n}p_{j_1\cdots j_n}(\boldsymbol{x})) \\
&= \sum_{j_1,\cdots,j_n,l=1}^{3} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_n j_n}\frac{\partial p_{j_1\cdots j_n}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \\
&= \sum_{j_1,\cdots,j_n,l=1}^{3} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_n j_n}a_{kl}q_{j_1\cdots j_n l}.
\end{aligned}$$

**例 5.** 设 $\boldsymbol{P}=\{p\}$ 为零阶张量 (标量), 则标量场的梯度

$$\nabla\boldsymbol{P}=\left\{\frac{\partial p}{\partial x_k}\right\}$$

是一个向量，即一阶张量.

**例 6.** 设 $\boldsymbol{P}=\{p_i\}$ 为一阶张量 (向量), 则其梯度

$$\nabla\boldsymbol{P}=\left\{\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right\}$$

为一个二阶张量.

**2) 散度**

$\boldsymbol{P}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ (或 $\operatorname{div}\boldsymbol{P}$) 定义为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{n-1}k}}{\partial x_k}\right\}. \tag{30}$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 为由其梯度 $\nabla\boldsymbol{P}$ 缩并而得，故为 $n-1$ 阶张量.

**例 7.** 设 $\boldsymbol{P}=\{p_i\}$ 为一阶张量 (向量), 则其散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial p_k}{\partial x_k}\right\}$$

为通常向量场的散度. 这是一个标量，即零阶张量.

**例 8.** 设 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 为一个二阶张量，那么其散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right\}$$

为一阶张量，即向量.

# 附录二　热力学概述

## 1. 热力学研究的对象

热力学研究的对象是由巨大数量的物质粒子 (分子、原子、电子等) 所组成的物质系统. 这是一个自由度非常大的动力学系统.

如果一个物质粒子系统 (下面简称系统) 与外界没有任何相互作用, 称该系统为 *孤立系统*. 如果它与外界没有物质交换, 但可以有能量交换, 则称其为 *封闭系统*.

经典热力学主要研究处于 *平衡态* 的系统. 所谓平衡态, 是指一个系统尽管组成它的物质粒子在作复杂的运动, 但从宏观上看, 系统各点附近的状态是相同的, 从而对整个系统可用相应的状态量 (如绝对温度等) 来描述所考察的状态. 除平衡态外, 经典热力学还讨论系统的 *热力学态*. 一个系统如果作为一个整体并不处于平衡态, 但它可以分成有限个部分, 而每一部分均处于平衡态, 则称该系统处于热力学态. 例如, 若一系统由 $A$ 及 $B$ 两部分组成, 而 $A$ 及 $B$ 均处于平衡态, 则该系统即处于热力学态.

在讨论系统状态的变化时, 在热力学中仅讨论初态与终态均为热力学态的这种变化. 而系统在变化过程中的每一瞬间, 则可以是热力学态, 也可以不是. 一般来说, 这些中间状态是非常复杂的. 只有当过程进行的速度相对于系统内部趋于平衡的速度而言非常缓慢时, 系统的中间状态才可视为热力学态. 一类重要的理想化的变化过程是 *准静态过程*. 如果一个系统在变化过程的每一瞬间都处于平衡态, 这种过程就称为准静态过程. 这是一种实际上并不存在的理想化过程. 但是当一个初态与终态都是平衡态的变化过程进行得极缓慢时, 就可以近似地将它视为一个准静态过程.

## 2. 热力学第一定律, 内能

热力学第一定律的基本思想是能量守恒. 确切地说, 守恒的是能量而不是热量.

**热力学第一定律**. *当一封闭系统由初态 $\alpha_1$ 变到终态 $\alpha_2$ 时, 系统得自外界的功 $\Delta W$ 与热量 $\Delta Q$ 的总和, 只取决于系统的初态与终态,*

*而与中间过程无关．因此，存在一个仅依赖于系统的状态量 $U$，使得*

$$\Delta U \stackrel{\mathrm{d}}{=} U(\alpha_2) - U(\alpha_1) = \Delta W + \Delta Q. \tag{1}$$

*此状态量 $U$ 称为系统的* 内能．

系统的内能是该系统内物质粒子 (通常指分子) 无规则运动的动能与它们之间相互作用形成的势能之和．

### 3. 热力学第二定律，熵

热力学第一定律阐明了热力学过程必须满足的能量关系，但没有指出过程变化的趋向．例如，若一热力学系统由 $A$ 及 $B$ 两个平衡态组成．设子系统 $A$ 及 $B$ 的温度分别为 $\theta_1$ 及 $\theta_2$．热力学第一定律告诉我们，如果 $A$ 及 $B$ 之间有热交换，则一个子系统得到的热量必须等于另一个子系统失去的热量，但并未指出热量传递的方向．然而经验告诉我们，热量一定是由高温的子系统传到低温的子系统．揭示自然界存在的这种不对称性，即自然现象的单向性，则有赖于热力学第二定律．

热力学第二定律有许多种叙述方式．这里采用克劳修斯 (Clausius) 不等式的形式．这种叙述方式虽然不太直观，但容易导出重要的状态量 —— 熵．

一个系统的终态与初态相同的变化过程称为 循环．

**热力学第二定律**．*设初态为平衡态的系统在与热源保持接触的情况下完成一个循环．在循环过程中，系统从绝对温度为 $\theta^e$ 的热源吸取热量 $\mathrm{d}Q$，则*

$$\oint \frac{\mathrm{d}Q}{\theta^e} \leqslant 0. \tag{2}$$

*(2) 式称* 克劳修斯不等式．*上述闭路积分是沿循环过程取的．*

下面讨论变化过程的可逆性．设所考察的系统从状态 $\alpha_1$ 变到状态 $\alpha_2$，而外界环境从状态 $\beta_1$ 变到状态 $\beta_2$．若有某种方法能使系统从状态 $\alpha_2$ 变回到 $\alpha_1$，而相应地环境从状态 $\beta_2$ 变回到 $\beta_1$，则称这个过程是 可逆过程．实际上发生的热力学过程都是不可逆的．

准静态过程，作为一种理想化的过程，是可逆的．这是因为准静态过程在每一瞬间都是平衡态．这样一种过程可以用相空间的一条曲线描绘．如对流体，状态量只有两个是独立的．设独立的状态变量取为

$(V,\theta)$, 这里 $V$ 为气体的体积, $\theta$ 为绝对温度. 那么初态为 $\alpha_1$ 、终态为 $\alpha_2$ 的准静态过程可由相平面 $(V,\theta)$ 上的一条曲线 $C$ (见图 1) 描绘. 这种过程自然是可逆的. 为此只要将状态 $\alpha_2$ 沿原曲线 $C$ 按相反方向变到 $\alpha_1$ 即可. 今后所说的可逆过程均指准静态过程.

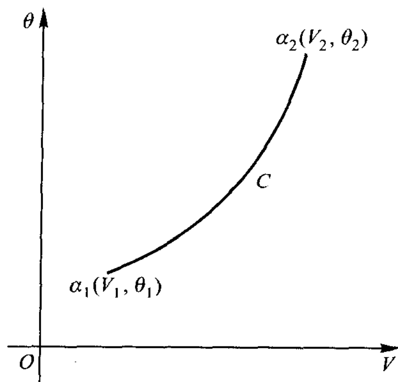



图 1

现考察由准静态过程形成的循环. 由于准静态过程是可逆的, 由 (2) 式有

$$\oint \frac{\bar{d}Q}{\theta} = 0, \tag{3}$$

其中 $\theta$ 为系统的绝对温度. 由于 (3) 式对相空间中的任一闭曲线均成立, 所以 $\dfrac{\bar{d}Q}{\theta}$ 为一全微分. 即存在一个状态量 $S$, 使

$$\mathrm{d}S = \frac{\bar{d}Q}{\theta}. \tag{4}$$

$S$ 称为系统的 熵. 对于上面所说的流体情况, 有

$$\bar{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V, \tag{5}$$

其中 $U$ 为内能, $p$ 为压强; 即有

$$\bar{d}Q = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right)\mathrm{d}V + \frac{\partial U}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta. \tag{6}$$

(4) 式说明，(6) 式右端一般来说不是全微分，但它有积分因子 $\frac{1}{\theta}$.

上面只对系统的平衡态定义了熵. 但熵具有可加性，对处于热力学态的系统，其熵定义为处于平衡态下的各子系统熵的和.

设一热力学系统由平衡态 $\alpha_1$ 经过某个过程 $L$ 变到平衡态 $\alpha_2$, 则必有

$$\int_{\alpha_1 L \alpha_2} \frac{\text{đ}Q}{\theta^e} \leqslant S(\alpha_2) - S(\alpha_1). \tag{7}$$

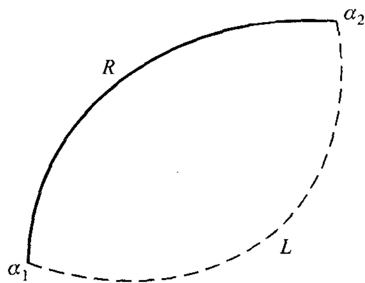



图 2

事实上，设 $R$ 为由 $\alpha_1$ 变到 $\alpha_2$ 的准静态过程 (见图 2). 由克劳修斯不等式 (2) 有

$$\int_{\alpha_1 L \alpha_2} \frac{\text{đ}Q}{\theta^e} + \int_{\alpha_2 R \alpha_1} \frac{\text{đ}Q}{\theta} \leqslant 0.$$

但 (4) 式给出

$$\int_{\alpha_2 R \alpha_1} \frac{\text{đ}Q}{\theta} = S(\alpha_1) - S(\alpha_2),$$

所以 (7) 式成立. (7) 式也可写为

$$\frac{\text{đ}Q}{\theta^e} \leqslant \text{d}S. \tag{8}$$

由此，若系统是孤立的或是绝热的，则有

$$\text{d}S \geqslant 0. \tag{9}$$

可以说明，这一结论对孤立或绝热，且初、终态均为热力学态的系统也是成立的．对一个孤立或绝热的热力学系统，(9) 式是一个过程得以进行的条件．

由 (9) 式不难得到

**热力学第二定律的另一种叙述**．把热量从低温系统传到高温系统而不引起其它变化是不可能的．

### 4. 勒让德 (Legendre) 变换

前面已经谈到过，可采用不同的两个热力学状态量作为自变量，并得到相应的状态方程，以此来建立热力学的基本关系式．为说明在一般情况下，如何进行这种自变量间的转化，先介绍一下勒让德变换．

我们知道，在 $(x, y, u)$ 空间的曲面可以视为点的轨迹，但也可以视为其切平面的包络．如果已知曲面的方程为

$$u = u(x, y), \tag{10}$$

则过其上一点 $(x, y, u(x, y))$ 的法线向量为 $(u_x, u_y, -1)$, 从而过此点的切平面为

$$\overline{u} - u - (\overline{x} - x)u_x - (\overline{y} - y)u_y = 0,$$

即

$$u_x\overline{x} + u_y\overline{y} - \overline{u} = xu_x + yu_y - u, \tag{11}$$

其中 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{u})$ 为此切平面上的变动坐标，而 $u = u(x, y)$．这样就得到一个依赖于两个参数 $(x, y)$ 的切平面族．记

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y, \quad \omega = xu_x + yu_y - u, \tag{12}$$

此切平面方程可简写为

$$\xi\overline{x} + \eta\overline{y} - \overline{u} = \omega. \tag{13}$$

$(\xi, \eta, \omega)$ 称为此切平面的 平面坐标．确定了它，就可按上式决定此切平面．这样，曲面 (10) 的切平面族 (11) 的平面坐标就由 (12) 式给

出. 原则上, 从 $\xi=u_x(x,y)$, $\eta=u_y(x,y)$ 可反解出 $x$ 及 $y$ 为 $(\xi,\eta)$ 的函数, 代入 (12) 式的最后一式, 就得到

$$\omega=\omega(\xi,\eta). \tag{14}$$

这个式子称为曲面的 *切平面坐标方程*.

曲面的这两种表示方法可以互换. 由上面的讨论知, 若已知曲面的点坐标方程 (10), 原则上可得到其切平面坐标方程 (14). 此外, 由 (12) 式有

$$\omega_\xi=x+\xi\frac{\partial x}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial y}{\partial\xi}-u_x\frac{\partial x}{\partial\xi}-u_y\frac{\partial y}{\partial\xi}=x. \tag{15}$$

同理

$$\omega_\eta=y. \tag{16}$$

综合 (12) 、(15) 与 (16) 式得: 曲面的点坐标方程 $u=u(x,y)$ 与切平面坐标方程 $\omega=\omega(\xi,\eta)$ 之间满足如下关系:

$$\begin{cases}\omega=x\xi+y\eta-u,\\ \xi=u_x,\quad \eta=u_y,\\ x=\omega_\xi,\quad y=\omega_\eta.\end{cases} \tag{17}$$

反之, 若已知曲面的切平面坐标方程 (14), 也就是给定了一个依赖于两个参数的平面族

$$\xi x+\eta y-u=\omega(\xi,\eta), \tag{18}$$

其中 $(x,y,u)$ 为此平面上的变动点坐标. 这个平面族的包络就决定了一个曲面. 根据求包络曲面的方法, 将 (18) 式对参数 $\xi$ 及 $\eta$ 分别求导一次, 得到

$$x=\omega_\xi,\quad y=\omega_\eta. \tag{19}$$

从中解出 $\xi$ 及 $\eta$ 为 $(x,y)$ 的函数, 再代入

$$u=\xi x+\eta y-\omega, \tag{20}$$

就得到所求的曲面 $u=u(x,y)$. 这就是所求包络面的点坐标方程. 由 (19)—(20) 式知, 此时有

$$u_x=\xi+x\frac{\partial\xi}{\partial x}+y\frac{\partial\eta}{\partial x}-\omega_\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}-\omega_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=\xi. \tag{21}$$

同理

$$u_y = \eta. \tag{22}$$

于是我们得到与 (17) 式完全相同的方程.

从关系式 (17) 可以看到：对于由 $u = u(x,y)$ 所决定的 $\omega = \omega(\xi,\eta)$, 由它确定的曲面点坐标方程必仍为原先的 $u = u(x,y)$. 因此，曲面的点坐标方程和切平面坐标方程是等价的，且它们通过 (17) 中的一组对称的式子相联系，二者之间具有对偶性.

将曲面的点坐标方程变换到切平面坐标方程的变换，称为勒让德变换. 这一变换和普通的变量变换不同，因为变换的本身依赖于所讨论的函数 $u = u(x,y)$. 在不少非线性问题中，正是由于这一点，可使问题得到很大的简化，甚至使一个非线性问题化为线性问题.

下面讨论能够进行勒让德变换的条件. 容易看到，只要能从

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y \tag{23}$$

中单值反解出 $x$ 及 $y$ 为 $(\xi,\eta)$ 的函数，勒让德变换即可进行. 由隐函数存在定理，若在所考察点，雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{24}$$

则至少在该点的一个邻域中，可由 (23) 式单值解出 $x$ 及 $y$. 对于满足

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \tag{25}$$

的曲面 $u = u(x,y)$, 勒让德变换失效. 满足这种关系式的曲面是可展曲面，即单参数切平面族的包络. 这时，每一切平面沿着一直线与曲面相切，自然不可能建立起曲面上的点与切平面之间的一一对应关系.

现在证明，若

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} = a \neq 0, \tag{26}$$

则相应的逆变换的雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} u_{\xi\xi} & u_{\xi\eta} \\ u_{\xi\eta} & u_{\eta\eta} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}. \tag{27}$$

这说明，反过来的勒让德变换也是可行的．事实上，将 (23) 式对 $\xi$ 及 $\eta$ 分别求导一次，得到

$$\begin{aligned} u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta} &= 1, \\ u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta} &= 0, \\ u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta} &= 0, \\ u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta} &= 1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi\xi} & \omega_{\xi\eta} \\ \omega_{\xi\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此即可得 (27) 式．

上面对二元函数引入勒让德变换的方法，对一般的 $n$ ($\geqslant 1$) 元函数 $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ 也可以类似地进行，其勒让德变换规则为

$$\begin{cases} u + \omega = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n, \\ u_{x_1} = \xi_1, \cdots, u_{x_n} = \xi_n, \\ \omega_{\xi_1} = x_1, \cdots, \omega_{\xi_n} = x_n. \end{cases} \tag{28}$$

这个勒让德变换得以进行的条件也与二元情况类似，这里不再详述．

### 5．热力学函数

前面说过，处于平衡态的流体系统，其状态量中只有两个是独立的．取不同的独立状态量，通过勒让德变换，可以得各种热力学函数．

由 (4)—(5) 式有

$$\mathrm{d}U = \theta \mathrm{d}S - p\mathrm{d}V. \tag{29}$$

若以 $e$ 及 $\tau$ 分别表示单位质量流体的内能与体积 (即比容)，而单位质量的熵仍以 $S$ 表示，则 (29) 式可写为

$$\mathrm{d}e = \theta \mathrm{d}S - p\mathrm{d}\tau. \tag{30}$$

于是，可取 $\tau$ ($= \dfrac{1}{\rho}$, $\rho$ 为密度) 及 $S$ 为独立变量，而 $e = e(\tau, S)$ 为相应的状态方程．于是有

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial e}{\partial \tau}. \tag{31}$$

我们假设 (这些假设通常是可以满足的)

$$\frac{\partial e}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial e}{\partial \tau} < 0, \tag{32}$$

且矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 e}{\partial S^2} & \dfrac{\partial^2 e}{\partial S \partial \tau} \\ \dfrac{\partial^2 e}{\partial S \partial \tau} & \dfrac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} \end{pmatrix} \tag{33}$$

为正定的.

现在我们要利用勒让德变换变到其它的独立变量, 并得到新的热力学函数.

将 $S$ 视为参变量, 对 $\tau$ 及 $e(\tau, S)$ 作勒让德变换. 由矩阵 (33) 的正定性, 这是可能的. 由 $n = 1$ 时的变换关系 (28), 有

$$\begin{cases} e + \omega = \tau\xi, \\ \dfrac{\partial e}{\partial \tau} = \xi, \quad \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi} = \tau. \end{cases} \tag{34}$$

由 (31) 及 (34) 式知 $p = -\xi$. 记 $i = -\omega$, (34) 的第一式可写为

$$i = e + p\tau. \tag{35}$$

$i$ 是 $p$ 与 $S$ 的函数: $i = i(p, S)$, 称为 (单位质量的) 热焓. 由 (34) 的最后一式, 有

$$\frac{\partial i}{\partial p} = \tau. \tag{36}$$

利用 (35) 式并注意到 (31) 式, 不难验证

$$\frac{\partial i}{\partial S} = \frac{\partial e(\tau, S)}{\partial S} = \theta. \tag{37}$$

这样, 当取 $p$ 及 $S$ 作为独立变量时, $\tau$ 及 $\theta$ 作为 $p$ 及 $S$ 的函数由 (36) 与 (37) 式给出, 而且还有

$$\mathrm{d}i = \tau \mathrm{d}p + \theta \mathrm{d}S. \tag{38}$$

对于等压过程，有 $\mathrm{d}i = \theta \mathrm{d}S = \mathrm{đ}Q$. 即在等压过程中，热焓的增量等于热量的增量，故热焓有时也称为 热函数. 我们指出，热焓是状态量，而热量却不是状态量.

类似地，将 $\tau$ 视为参数，对 $S$ 及 $e(\tau, S)$ 作勒让德变换. 变换关系式 (28) 给出

$$\begin{cases} e + \omega = S\xi, \\ \dfrac{\partial e}{\partial S} = \xi, \quad \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi} = S. \end{cases} \tag{39}$$

由 (31) 式知 $\theta = \xi$. 记 $F = -\omega$, (39) 的第一式可写为

$$F = e - \theta S. \tag{40}$$

$F$ 是 $\tau$ 及 $\theta$ 的函数： $F = F(\tau, \theta)$, 称为 (单位质量的) 亥姆霍兹 (Helmholtz) 自由能. 由 (39) 的最后一式有

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -S. \tag{41}$$

类似于 (37) 式，容易验证

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial e(\tau, S)}{\partial \tau} = -p. \tag{42}$$

这样，当取 $\tau$ 及 $\theta$ 作为独立变量时， $S$ 及 $p$ 作为 $\tau$ 及 $\theta$ 的函数可由 (41) 及 (42) 式给出，而且有

$$\mathrm{d}F = -p\mathrm{d}\tau - S\mathrm{d}\theta. \tag{43}$$

下面说明一下亥姆霍兹自由能的物理意义. 我们知道，一个热力学系统释放出的能量不可能全部用来做功，其中一部分必然以热的形式传递出去. 我们感兴趣的是能用来做功的这一部分. 对于等温过程，由 (40) 式，有

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}e - \theta \mathrm{d}S = \mathrm{d}e - \mathrm{đ}q, \tag{44}$$

这里 $\mathrm{đ}q$ 表示由外界传入此 (单位质量) 系统的热量，而 $\mathrm{d}w = \mathrm{d}e - \mathrm{đ}q$ 则是外界对此 (单位质量) 系统所作的功. 所以， $-\mathrm{d}F$ 就是在等温过

程中系统能够对外界做的功.

现在对 $\tau, S$ 及 $e(\tau, S)$ 作勒让德变换. 变换关系式 (28) 给出

$$\begin{cases} e+\omega=\tau\xi+S\eta, \\ \dfrac{\partial e}{\partial \tau}=\xi, \quad \dfrac{\partial e}{\partial S}=\eta, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi}=\tau, \quad \dfrac{\partial \omega}{\partial \eta}=S. \end{cases} \tag{45}$$

由 (31) 式知

$$\xi=-p, \quad \eta=\theta. \tag{46}$$

记 $G=-\omega$, 则

$$G=e+p\tau-\theta S=i-\theta S. \tag{47}$$

$G$ 是 $p$ 及 $\theta$ 的函数: $G=G(p,\theta)$, 称为 (单位质量的) 吉布斯 (Gibbs) 自由能, 也称为热力学势. 由 (45) 的最后两式得

$$\frac{\partial G}{\partial p}=\tau, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta}=-S. \tag{48}$$

这样, 当取 $p$ 及 $\theta$ 作为独立变量时, $\tau$ 及 $S$ 作为 $p$ 及 $\theta$ 的函数可由 (48) 式给出, 而且有

$$\mathrm{d}G=\tau\mathrm{d}p-S\mathrm{d}\theta. \tag{49}$$

**6. 内能与熵的表达式**

现在讨论当以 $\tau$ 及 $\theta$ 作为独立变量时, 如何利用状态方程 $p=p(\tau,\theta)$ 以及定容比热 $c_V$ 来表示流体的内能与熵. 所谓定容比热是指单位质量的流体在体积不变时, 温度升高一度所吸收的热量. 显然

$$c_V=\frac{\partial e(\tau,\theta)}{\partial \theta}. \tag{50}$$

由 (30) 式,

$$\theta\mathrm{d}S=\mathrm{d}e+p\mathrm{d}\tau, \tag{51}$$

从而

$$\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}=c_V \tag{52}$$

及

$$\theta\frac{\partial S}{\partial\tau}=\frac{\partial e}{\partial\tau}+p. \tag{53}$$

但由 (43) 式有

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}=\frac{\partial p}{\partial\theta}. \tag{54}$$

这样，(53) 式给出

$$\frac{\partial e}{\partial\tau}=\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}-p. \tag{55}$$

由 (50) 及 (55) 式，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e &= \frac{\partial e}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau+\frac{\partial e}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \left(\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}-p\right)\mathrm{d}\tau+c_V\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{56}$$

而由 (52) 及 (54) 式，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \frac{\partial S}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau+\frac{\partial S}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\partial p}{\partial\theta}\mathrm{d}\tau+\frac{c_V}{\theta}\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{57}$$

状态方程 $p=p(\tau,\theta)$ 以及 $c_V$ 一般可通过实验得到. 这样，由 (56) 及 (57) 即可得到 $e$ 及 $S$ 的表达式.

对于理想气体, 状态方程为

$$p=R\frac{\theta}{\tau}, \tag{58}$$

其中 $R$ 为一个正常数. 由 (55) 式，此时有

$$\frac{\partial e}{\partial\tau}=0. \tag{59}$$

这说明，理想气体的内能 $e$ 只是 $\theta$ 的函数： $e = e(\theta)$, 因此定容比热 $c_V$ 也如此： $c_V = c_V(\theta)$. 这样，由 (50) 式就得到

$$e = \int c_V(\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{60}$$

而由 (57) 式，则给出熵的表达式

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{R}{\tau} \mathrm{d}\tau + c_V(\theta) \frac{1}{\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \int R \mathrm{d} \ln \tau + c_V(\theta) \mathrm{d} \ln \theta. \end{aligned} \tag{61}$$

当 $c_V$ 为常数时 (在温度不太高时，理想气体即可认为满足这一条件), 气体称为*多方气体*. 此时，由 (60) 及 (61) 式，并注意到绝对温度为 0 时内能应为 0, 我们有

$$e = c_V \theta, \tag{62}$$

$$\begin{aligned} S &= c_V \int \mathrm{d} \ln \left( \theta \tau^{\frac{R}{c_V}} \right) \\ &= c_V \ln(\theta \tau^{\gamma - 1}) + \text{常数}, \end{aligned} \tag{63}$$

其中 $\gamma = \dfrac{R}{c_V} + 1$ 称为*绝热指数*. 利用状态方程 (58), 上式又可写为

$$\begin{aligned} S &= c_V \ln \left( \frac{p \tau^\gamma}{R} \right) + \text{常数} \\ &= c_V \ln(p \tau^\gamma) + \text{常数}. \end{aligned} \tag{64}$$

由 (64) 式又可得

$$p = (\gamma - 1) \tau^{-\gamma} \exp \left( \frac{S - S_0}{c_V} \right),$$

其中 $S_0$ 为常数. 这样，由 (62) 、 (58) 及 $\gamma$ 的定义，又可得内能的如下表达式

$$e = \tau^{-(\gamma - 1)} \exp \left( \frac{S - S_0}{c_V} \right). \tag{65}$$

利用这个表达式，容易对多方气体验证假设 (32) 以及矩阵 (33) 的正定性.

# 索　引

(按汉语拼音次序排列；名词后的数字是该名词出现的页码)

## A



## B

C



D

E



F



G

H



J

## K



## L

## M



## N



## O

## P



## Q



## R



## S

T



W

X



Y

## Z